Lời nói đầu

Chào các Em học sinh thân mến!

Câu hình học phẳng Oxy chắc chắn xuất trong đề thi THPT Quốc Gia hàng năm. Nhằm đáp ứng xu hướng ra đề mới của Bộ Giáo Dục và Đào Tạo về nội dung của câu này.Thầy biên soạn tài liệu này với mục đích giúp các Em có thể chinh phục được câu hình học phẳng. Từ đó xây dựng lòng tin để có thể đạt kết quả tốt nhất trong kì thi. Tài liệu được chia ra thành 4 chương:

Chương 1. Các bài toán liên quan đến đường tròn

Chương 2. Các bài toán về hình vuông – hình chữ nhật

Chương 3. Các bài toán về hình thang- hình bình hành-hình thoi

Chương 4. Các bài toán về tam giác

Mỗi chương được nhắc lại lí thuyết,có bài tập mẫu và bài tập rèn luyện và hướng dẫn bài tập rèn luyện.

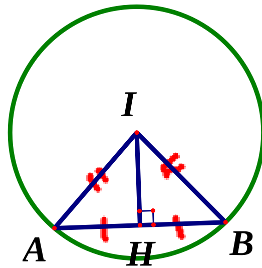
Dù đã cố gắng nhưng chắc chắn tài liệu sẽ không tránh khỏi sai sót nhất định.Hy vọng các Bạn thông cảm và rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến từ các Bạn đọc! Để lần sau tài liệu sẽ hoàn chỉnh hơn.

CHƯƠNG 1. CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG TRÒN

Phần 1. Một số kiến thức cần nhớ

1. Đường kính và dây cung

Cho đường tròn tâm I có dây cung AB khác đường kính và H là trung điểm AB.



Khi đó, IH là đường trung trực của AB.

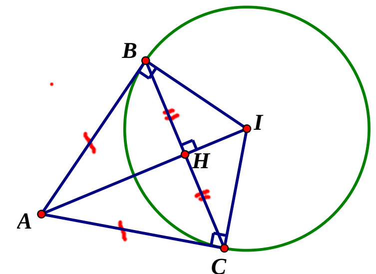
Thật ra, do ΔIAB cân tại I (IA=IB=R) nên IH vừa là đường cao, đường trung tuyến, đường trung trực, đường phân giác.

2. Tiếp tuyến và tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau

a. Cho d là tiếp tuyến của đường tròn tâm (I;R) và H là tiếp điểm. Khi đó:

i) $d\left(I;d\right)=R$. ii) IH vuông góc d.

b. Giả sử AB, AC là các tiếp tuyến của đường tròn (I;R) với B,C là các tiếp điểm khi đó:



i) AI là đường trung trực của BC.

ii) Tứ giác ABIC nội tiếp.

3. Góc ở tâm

a. Định nghĩa:Góc ở tâm là góc có đỉnh là tâm và hai cạnh là hai bán kính.

b. Tính chất: Hai góc ở tâm chắn hai cung bằng nhau thì bằng nhau.

4. Góc ở nội tiếp

a. Định nghĩa:Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh là hai dây cung.

b. Tính chất:

i) Các góc nội tiếp chắn hai dây cung bằng nhau thì bằng nhau.Đặt biệt, các góc nội tiếp chắn cùng một dây cung thì bằng nhau.

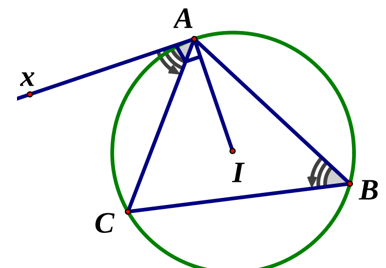
ii) Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các dây cung bằng nhau.

iii) Góc nội tiếp ($\leq 90^\circ$) bằng một nữa góc ở tâm chắn cùng dây cung.

iv) Góc nội tiếp chắn đường kính là góc vuông.

5. Góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung

a. Định nghĩa:Góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung là góc có đỉnh là tiếp điểm, có một cạnh là một tia của tiếp tuyến và cạnh còn lại là dây cung.



xAC là góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung.

b. Tính chất:

i) Góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung bằng một nửa số đo cung bị chắn.

ii) Góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung bằng góc nội tiếp chắn cùng dây cung.

6. Tứ giác nội tiếp

Tứ giác nội tiếp là tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn. Ta có các phát biểu tương đương sau:

a.Tứ giác nội tiếp $\Leftrightarrow$ tổng hai góc đối của tứ giác bằng 180°.
b. Tứ giác nội tiếp $\Leftrightarrow$ hai góc kề cùng chắn một cạnh bằng nhau.
c. Tứ giác nội tiếp $\Leftrightarrow$ góc ngoài tại một đỉnh bằng góc đối trong của đỉnh đó.

...

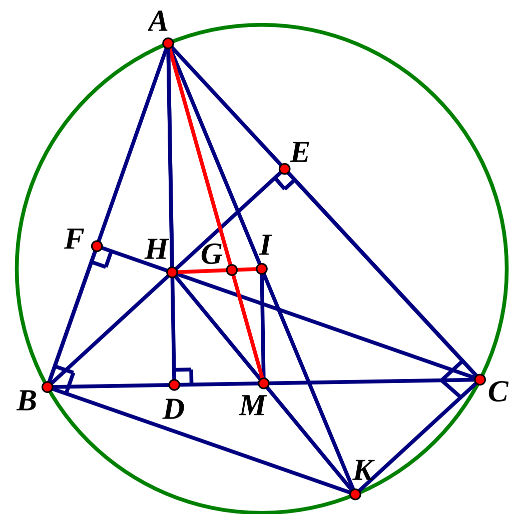
Phần 2. Rèn luyện kỉ năng chứng minh và vận dụng tính chất biết trước để giải bài toán

1.Bài toán 1(BT1)

Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (I;R).H là trực tâm,M là trung điểm của BC và G là trọng tâm ΔABC.
AKlà đường kính. Chứng minh:

a) BKCH là hình bình hành.
b) $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{IM}$; $\overrightarrow{BH}=2\overrightarrow{IN}$ và $\overrightarrow{CH}=2\overrightarrow{IP}$ .N,P lần lượt là trung điểm của AC và AB.
c) H,G,I thẳng hang và $\overrightarrow{HI}=3\overrightarrow{GI}$.
d) Trong trường hợp $A=60^\circ$. Chứng minh: $AH=AI$.

Chứng minh



a) $\begin{cases} CH\perp AB \\ KB\perp AB \end{cases} \Rightarrow CH\ //\ KB; \begin{cases} BH\perp AC \\ KC\perp AC \end{cases} \Rightarrow BH\ //\ KC$. Do đó, ABKC là hình bình hành.

b) ABKC là hình bình hành và M là trung điểm của BC, suy ra M là trung điểm của HK. Do đó IM là đường trung bình của $\Delta AHK. \Rightarrow \begin{cases} AH\ //\ IM \\ AH=2IM \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{IM}$.

Các ý còn lại tương tự. Bạn đọc thử chứng minh để nhớ nhé.

c) G là trọng tâm của ΔABC nên $AM=\frac{3}{2}AG$.Mà AM là đường trung tuyến của ΔAHK nên G cũng là trọng tâm của ΔAHK. HI là đường trung tuyến của ΔAHK nên H,G,I thẳng hàng và $\overrightarrow{HI}=3\overrightarrow{GI}$.

d) $A=60^\circ \Rightarrow BIC=120^\circ \Rightarrow MIC=60^\circ$ (góc nội tiếp bằng 1/2 góc ở tâm chắn cùng dây cung). ΔIMC vuông tại M. Ta có:
$IM=IC.\cos 60^\circ \Rightarrow IC=2IM \Rightarrow IA=IC=2IM$. Mà $AH=2IM$ (câu b). Suy ra $AH=AI$.

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy.Cho ΔABC có đỉnh $A(-1;2)$, trực tâm $H(1;1)$, tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(2;0)$. Viết phương trình cạnh BC.

Phân tích:. BC đã có vtpt là $\overrightarrow{AH}=(2;-1)$. Nếu tìm một điểm thuộc cạnh BC thì bải toán đã được giải??

Gọi M là trung điểm của BC. Nhớ lại $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{IM}$ (**BT1** câu b).Thế là có ngay điểm M.

Giải

BC có vtpt là $\overrightarrow{AH}=(2;-1)$. Gọi M là trung điểm của BC. Khi đó:

$$\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{IM}\Leftrightarrow\begin{cases}2=2(x_M-2)\\-1=2(y_M-0)\end{cases}\Rightarrow M\left(3;-\frac{1}{2}\right).$$

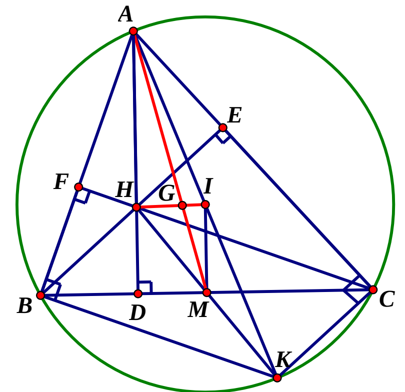
BC đi qua M và có vtpt $\overrightarrow{AH}$ nên $BC:2(x-3)-\left(y+\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow BC:2x-y-13/2=0$.

Chú ý: Trong bài làm các em phải chứng minh $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{IM}$ (xem **BT1** câu b).

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng Oxy.Cho ΔABC có trực tâm $H(1;3)$,trọng tâm $G\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$ và tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp ΔABC có phương trình $x-3y+5=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC.

Giải

Đặt $d:x-3y+5=0$ là tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Gọi M,I lần lượt là trung điểm của BC và tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Khi đó: $\overrightarrow{HI}=3\overrightarrow{GI}$ (xem **BT1** câu c) và $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{GM}$ (tính chất của trọng tâm).



Từ: $\overrightarrow{HI}=3\overrightarrow{GI}\Leftrightarrow\begin{cases}x_I-1=3\left(x_I-\frac{4}{3}\right)\\y_I-3=3\left(y_I-\frac{4}{3}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_I=\frac{3}{2}\\y_I=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow I\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right).$

Ta có: $IA\perp d\Rightarrow IA:3x+y+m=0$. $I\in IA\Rightarrow 3.\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+m=0\Leftrightarrow m=-5$.

Vậy $IA:3x+y-5=0$. $A=d\cap IA$ nên tọa độ A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}3x+y-5=0\\x-3y+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\Rightarrow A(1;2)$$

.Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm I và bán kính IA.

$$\overrightarrow{IA}=\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)\Rightarrow IA=\sqrt{\frac{5}{2}}\Rightarrow IA^2=\frac{5}{2}.(C):\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}.$$

Ta có $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{GM}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M-1=3\left(x_M-\dfrac{4}{3}\right)\\ y_M-1=3\left(y_M-\dfrac{4}{3}\right)\end{cases}\Rightarrow M\left(\dfrac{3}{2};1\right)$.

BC đi qua M và có vtpt là $\overrightarrow{AH}=(0;1)$ nên BC có phương trình:

$BC:0\left(x-\dfrac{3}{2}\right)+1.(y-1)=0\Leftrightarrow BC:y-1=0$.

$B,C=BC\cap(C)$ nên tọa độ B,C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}y-1=0\\ \left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}\vee\begin{cases}x=3\\ y=1\end{cases}\Rightarrow B(0;1),C(3;1)\vee B(3;1),C(0;1).$$

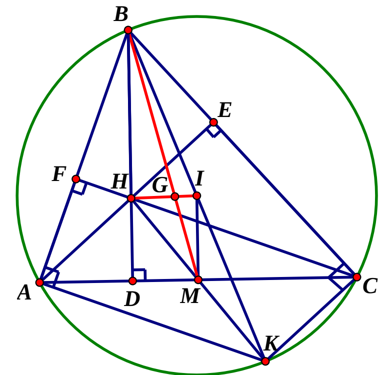
Vậy: $A(1;2),B(0;1),C(3;1)$ hoặc $A(1;2),B(3;1),C(0;1)$.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng Oxy.Cho ΔABC có trực tâm $H(-1;3)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(3;-3)$ và đỉnh $B(1;1)$. Tìm tọa độ các đỉnh A,C, biết $x_A>x_C$.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{IB}=(-2;4)\Rightarrow IB=\sqrt{20}$. Đường tròn ngoại tiếp ΔABC có tâm I và bán kính IB có phương trình: $(x-3)^2+(y+3)^2=20$.

Gọi M là trung điểm AC, ta có $\overrightarrow{BH}=2\overrightarrow{IM}$ (xem **BT1** câu b).



$$\overrightarrow{BH}=2\overrightarrow{IM}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M-3=\dfrac{1}{2}(-1-1)\\ y_M+3=\dfrac{1}{2}(3-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=2\\ y_M=-2\end{cases}\Rightarrow M(2;-2).$$

Đường thẳng AC vuông góc IM và đi qua M có phương trình:

$AC:x-y-4=0$.

$A,C=BC\cap(C)$ nên tọa độ A,C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x-y-4=0\\ (x-3)^2+(y+3)^2=20\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1,y=5\\ x=5,y=-1\end{array}\right.\Rightarrow A(5;1),C(-1;5)\quad (x_A>x_c).$$

Vậy tọa độ các điểm cần tìm là $A(5;1),C(-1;5)$.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng Oxy.Cho ΔABC có trực tâm $H(1;2)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(3;-2)$, $A=60^\circ$. Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC, đỉnh A thuộc đường thẳng $d:x+y-5=0$

và $x_B < x_C$.

Giải

Với $A = 60^\circ$ ta chứng minh được $AH = AI$. Suy ra A thuộc đường trung trực của IH.

Đường trung trực của IH đi qua trung điểm N(2;0) của IH và có vtpt $\overrightarrow{HI} = (2;-4)$ nên có phương trình $\Delta: x - 2y - 2 = 0$. Điểm $A = d \cap \Delta$ nên tọa độ của điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ x + 5y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(4;1).$$

Đường tròn ngoại tiếp ΔABC có tâm I và bán IA nên có phương trình: $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 10$. Gọi M là trung điểm của BC, ta có

$$\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = 2(x-3) \\ 1 = 2(y+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right).$$

BC đi qua M và có vtpt là $\overrightarrow{AH} = (-3;1)$ có phương trình $BC: -3x + y + 6 = 0$.

$B, C = BC \cap (C)$ nên tọa độ B,C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} -3x + y + 6 = 0 \\ (x-3)^2 + (y+2)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}, y = \dfrac{-3+\sqrt{3}}{2} \\ x = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}, y = -\dfrac{3+\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow B\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}; \frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right); C\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}; -\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$$ Vì

$x_B < x_C$. Vậy các điểm cần tìm là $A(4;1), B\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}; \frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right); C\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}; -\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng Oxy.Cho ΔABC có trọng tâm $G(1;1)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I\left(\frac{7}{18}; \frac{37}{18}\right)$ và cạnh AC có phương trình $2x - y - 4 = 0$.

Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC**,** biết $x_A > 2$.

Giải

Gọi M là trung điểm của AC, ta có $IM \perp AC \Rightarrow IM: x + 2y + m = 0$. I thuộc IM nên suy ra $IM: x + 2y - \frac{9}{2} = 0$. $M = AC \cap IM$ nên tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} 2x-y-4=0 \\ x+2y-\frac{9}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{5}{2};1\right)$. Do G là trọng tâm của ΔABC ,ta có

$\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B-\frac{5}{2}=3(1-\frac{5}{2}) \\ y_B-1=3(1-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=-2 \\ y_B=1 \end{cases} \Rightarrow B(-2;1)$.Đường tròn ngoại tiếp ΔABC có tâm I và bán

kính IB có phương trình: $(C):\left(x-\frac{7}{18}\right)^2+\left(y-\frac{37}{18}\right)^2=\frac{1105}{162}$.Các điểm $A, C = AC \cap (C)$ nên tọa độ A,C là

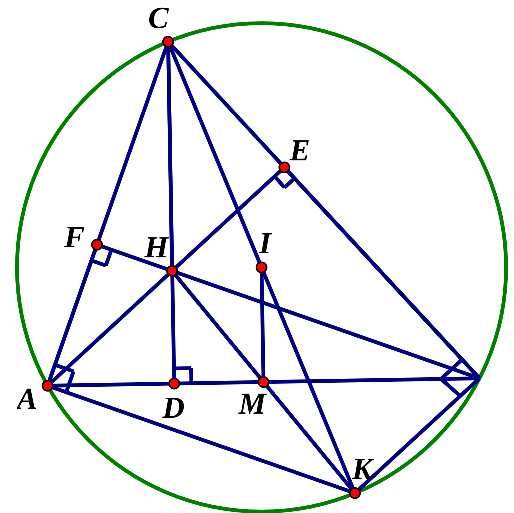
nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} 2x-y-4=0 \\ \left(x-\frac{7}{18}\right)^2+\left(y-\frac{37}{18}\right)^2=\frac{1105}{162} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, y=2 \\ x=2, y=0 \end{array}\right. \Rightarrow A(3;2), C(2;0) \quad (x_A>2)$.

Vậy tọa độ các điểm cần tìm là $A(3;2), B(-2;1), C(2;0)$.

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng Oxy.Cho ΔABC có trực tâm $H(3;-1)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(-3;0)$ và đỉnh $C(3;-7)$. Tìm tọa độ các đỉnh A,B của ΔABC.

Giải



Đường tròn ngoại tiếp ΔABC có tâm I và bán kính IC có phương trình: $(x+3)^2+y^2=85$.

Gọi M là trung điểm AB, ta có $\overrightarrow{CH}=2\overrightarrow{IM}$ (xem **BT1** câu b).

$2\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{CH} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M+3=\frac{1}{2}(3-3) \\ y_M=\frac{1}{2}(-1+7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M=-3 \\ y_M=3 \end{cases} \Rightarrow M(-3;3)$.

Đường thẳng AB vuông góc IM và đi qua M có phương trình:
$AB: y-3=0$.

$A, B = AB \cap (C)$ nên tọa độ A,B là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} y-3=0 \\ (x+3)^2+y^2=85 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3-2\sqrt{19}, y=3 \\ x=-3+2\sqrt{19}, y=3 \end{array}\right.$

$\Rightarrow A\left(-3-2\sqrt{19};3\right), B\left(-3+2\sqrt{19};3\right) \vee A\left(-3+2\sqrt{19};3\right), B\left(-3-2\sqrt{19};3\right)$.

Vậy tọa độ các điểm cần tìm là: $A\left(-3-2\sqrt{19};3\right), B\left(-3+2\sqrt{19};3\right) \vee A\left(-3+2\sqrt{19};3\right), B\left(-3-2\sqrt{19};3\right)$.

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng Oxy.Cho ΔABC có đường trung tuyến và đường cao xuất phát từ A có phương trình lần lượt là $13x-6y-2=0$ và $x-2y-14=0$ Tìm tọa độ các của đỉnh ΔABC, biết tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là $I(-6;0)$.

Giải

Đặt $d_1: 13x-6y-2=0, \mathrm{d}_2: x-2y-14=0$ đây lần lượt là đường trung tuyến và đường cao xuất phát từ A .

Khi đó, tọa độ của A là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}13x-6y-2=0\\ x-2y-14=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-4\\ y=-9\end{cases} \Rightarrow A(-4;-9)$. Gọi H và M lần lượt là trực tâm và trung điểm của BC. Khi đó: $H\in d_1 \Rightarrow \mathrm{H}(2h+14;h), \mathrm{M}\in \mathrm{d}_2 \Rightarrow M(\mathrm{m};\frac{13m-2}{6})$. Ta có: $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{IM}$ (xem **BT1** câu b).

$$\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases}2h+14+4=2(m+6)\\ h+9=2\left(\dfrac{13m-2}{6}-0\right)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2h-2m=-6\\ h-\dfrac{13}{3}m=-\dfrac{29}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}h=-1\\ m=2\end{cases}.$$

Vậy $H(12;-1), M(2;4)$. Đường thẳng BC đi qua M và có vtpt là $\overrightarrow{IM}$ nên có phương trình $BC: 2x+y-8=0$. Đường tròn ngoại tiếp ΔABC có tâm I và bán kính IA có phương trình: $(x+6)^2+y^2=85$. Các điểm $\mathrm{B}, C=BC\cap(C)$ nên tọa độ B,C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}2x+y-8=0\\ (x+6)^2+y^2=85\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3, y=2\\ x=1, y=6\end{array}\right. \Rightarrow B(3;2), \mathrm{C}(1;6) \vee B(1;6), \mathrm{C}(3;2).$$

Vậy tọa độ các điểm cần tìm là $A(-4;-9), B(3;2), \mathrm{C}(1;6)$ hoặc $A(-4;-9), B(1;6), \mathrm{C}(3;2)$.

2. Bài toán 2(BT2)

Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (I;R). D,E,F lần lượt là chân đường cao kẻ từ A,B,C của ΔABC .H là trựctâm. Chứng minh:

a) $IA\perp FF; IB\perp DF$ và $IC\perp DE$.
b) H là tâm đường tròn nội tiếp ΔDEF.

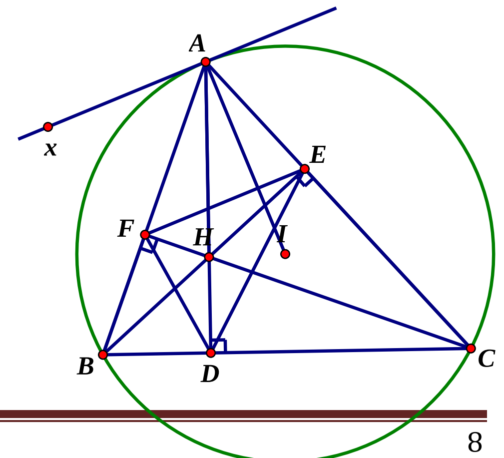
Chứng minh

a) Kẻ tiếp tuyến xy tại A. Khi đó: $xAB=ACB(1)$. Ta có $BFC=BEC=90^\circ \Rightarrow$ tứ giác BCEF nội tiếp. Suy ra $AFE=ACB(2)$ (góc ngoài của tứ giác nội tiếp).

Từ (1) và (2) suy ra $AFE=xAB \Rightarrow xy \parallel EF$. Mà $xy\perp IA$,do đó $IA\perp EF$.

Các ý còn lại các Em chứng minh tương tự nhé.!

b) Tứ giác BDHF nội tiếp $\Rightarrow HDF=HBF(1)$. Tứ giác CDHE nội

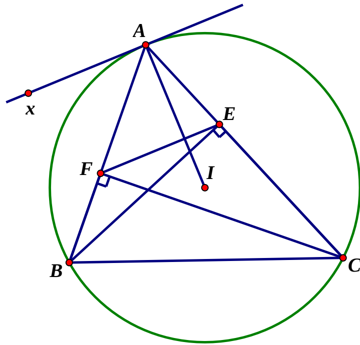


tiếp $\Rightarrow HDE = HCE(2)$. Tứ giác BCEF nội tiếp $\Rightarrow FBE = FCE(3)$. (1),(2) và (3) $\Rightarrow HDE = HDF$. Khi đó DH là tia phân giác trong FDE. Chứng minh tương tự ta có H là giao điểm ba đường phân giác trong của ΔDEF. Nên H là tâm đường tròng nội tiếp ΔDEF.

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng Oxy.Cho ΔABC nội tiếp đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=5$.

Chân đường cao kẻ từ B và C lần lượt là $E(0;1)$ và $F(1;3)$. Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC, biết $x_A > 0$.

Giải



Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$. Ta có $IA \perp EF$ (xem **BT2** câu a).

IA đi qua I và có vtpt $\overrightarrow{EF}=(1;2)$ có phương trình

$IA: 1(x-1)+2(y-2)=0 \Leftrightarrow IA: x-2y-5=0$. Khi đó tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=5\\ x+2y-5=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3, y=1\\ x=-1, y=3\end{array}\right.$$

Vậy $A(3;1)$ (vì $x_A > 0$). AC đi qua A và E có phương trình $AC: y-1=0$. $C = AC \cap (C)$ nên tọa độ ,C là nghiệm của hệ phương trình:

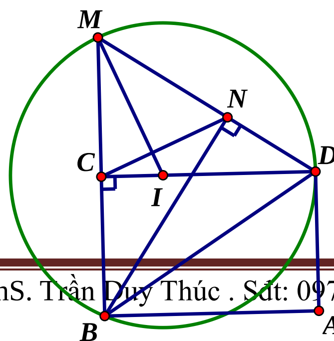
$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=5\\ y-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3, y=1(l)\\ x=-1, y=1(n)\end{array}\right. \Leftrightarrow C(-1;1)$. Ở đây ta loại $x=3, y=1$ vì trùng điểm A. AB đi qua A và F có phương trình $AC: x+y-4=0$. $B = AB \cap (C)$ nên tọa độ B là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=5\\ x+y-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3, y=1(l)\\ x=0, y=4(n)\end{array}\right. \Leftrightarrow B(0;4)$. Ở đây ta loại $x=3, y=1$ vì trùng điểm A.

Vậy tọa độ các điểm cần tìm là $A(3;1), C(-1;1), B(0;4)$.

Ví dụ 9. Trong mặt phẳng Oxy.Cho chữ nhật ABCD. Gọi M là điểm đối xứng của B qua C và N là hình chiếu vuông góc của B trên MD. Tam giác BMD nội tiếp đường tròn $(C):(x-4)^2+(y-1)^2=25$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật biết đường thẳng CN có phương trình $3x-4y-17=0$. Đường thẳng BC đi qua điểm $E(7;0)$ và M có tung độ âm.

Giải



Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=5$. Do ΔBMD nội tiếp đường tròn (C) và N,C là các chân đường cao nên ta chứng minh được $IM \perp NC$ (xem **BT2** câu a). IM đi qua I và $IM \perp NC$ nên có phương trình

$IM: 4(x-4)+3(y-1)=0 \Leftrightarrow IM: 4x+3y-19=0$. M là giao điểm giữa (C) và IM nên tọa độ của M là nghiệm của hệ: $\begin{cases}(x-4)^2+(y-1)^2=25\\4x+3y-19=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=7, y=-3\\x=1, y=5\end{array}\right. \Leftrightarrow M(7;-3)$ (vì tung độ M âm).

Đường thẳng BC đi qua M và E có phương trình $BC: x=7$. Điểm C là giao điểm giữa BC và NC nên tọa C là nghiệm của hệ $\begin{cases}3x-4y-17=\\x=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=7\\y=1\end{cases} \Leftrightarrow C(7;1)$. Điểm C là trung điểm của M và B $\Rightarrow B(7;5)$. DC đi qua C và vuông góc BC có phương trình $DC: y-1=0$.

Tọa độ D là nghiệm của hệ $\begin{cases}(x-4)^2+(y-1)^2=25\\y-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=9, y=1\\x=-1, y=1\end{array}\right.$. Vì B và D phải nằm cùng phía so với đường thẳng CN nên ta

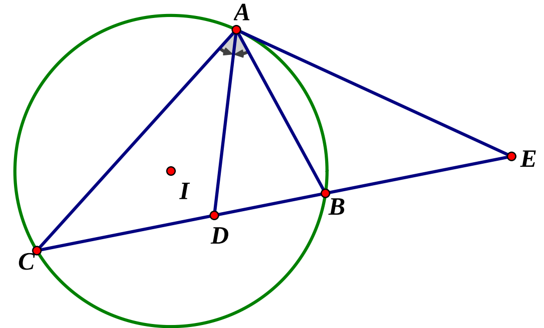
nhận $D(-1;1)$. Do $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB} \Rightarrow A(-1;5)$.

Vậy tọa độ các điểm cần tìm là $A(-1;5), B(7;5), C(7;1), D(-1;1)$.

3.Bài toán 3(BT3)

Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (I;R). Điểm E là là giao điểm của tiếp tuyến tại A và BC. D là chân đường phân giác kẻ từ A. Chứng minh: ΔEAD cân.

Chứng minh

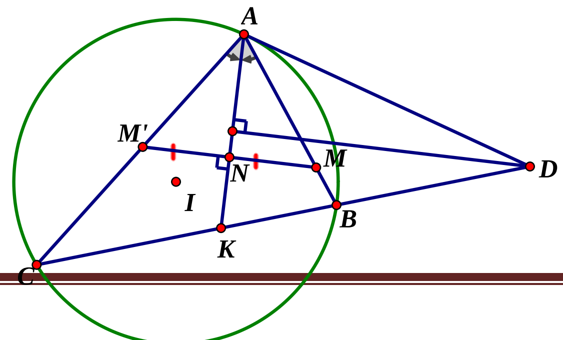


Đặt: $A_1 = EAB; A_2 = BAD; A_3 = DAC; D = ADE; C = ACB$.

Ta có: $D = A_3 + C$ (1)(góa ngoài của ΔDAC) và $EAD = A_1 + A_2$ (2). Mà $A_3 = A_2$ (3) (do AD là đường phân giác trong góc A và $A_1 = C$ (4)(góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung. Từ (1),(2),(3), (4) suy ra $EAD = D \Rightarrow \Delta EAD$ cân.

Ví dụ 10. Trong mặt phẳng Oxy.Cho ΔABC có $A(1;4)$, tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp ΔABC cắt BC tại D, đường phân giác trong góc ADB có phương trình $x-y-2=0$. Điểm $M(-4;1)$ thuộc cạnh AC. Viết phương trình cạnh AB.

Giải



Gọi K là chân đường phân giác trong góc A,khi đó ΔDAK cân tại D(xem **BT3**). Đặt $d: x-y-2=0$ đây là đường phân giác trong góc ADB và ΔDAK cân tại D suy ra $AK \perp d \Rightarrow AK: x+y+m=0$. Do điểm A thuộc AK nên ta

có phương trình $AK: x+y-5=0$. Gọi M' là điểm đối xứng của M qua AK, khi đó M' thuộc AB. Ta có MM' đi qua M và $MM' \perp AK$ nên có phương trình $x-y+5=0$.Gọi $N = MM' \cap AK \Rightarrow N(0;5)$. N là trung điểm của M và M' $\Rightarrow M'(4;9)$. Đường thẳng AB đi qua A và M' có phương trình $AB: 5x-3y+7=0$.

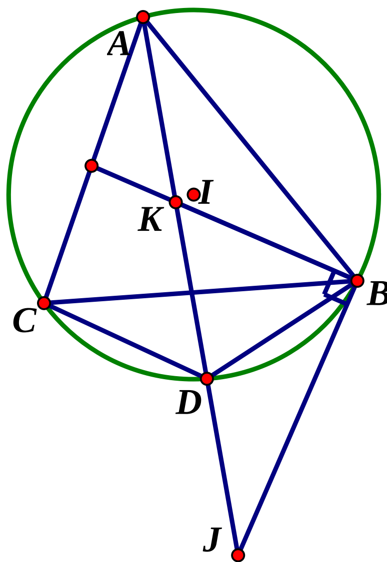
4. Bài toán 4(BT4)

Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (C) có (I;R). K là tâm đường tròn nội tiếp và D là giao điểm giữa AK và (C); J là giao điểm giữa AK và phân giác góc ngoài tại B. Chứng minh: D là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác KBJC.

Chứng minh

Để D là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác KBJC ta sẽ chứng minh $DB = DC = DK = DJ$.

Ta đã có $DB = DC$ (do AK là đường phân giác nên D là điểm chính giữa cung BC hay các em hiểu do $DAC = DAB \Rightarrow DB = DC$ các em xem lại tính chất của góc nội tiếp nhé!).



Vậy ta chỉ cần chứng minh $DB = DK$. Xét ΔABK có $BKD = KAB + KBA\ (1)$ (tính chất góc ngoài của tam giác). Ta có $KBD = DBC + CBK\ (2)$.

Mà $DAC = DAB$ và $DBC = DAC$ (cùng chắn cung DC), do đó $DBC = DAB\ (3)$ Thêm nửa là $CBK = KBA\ (4)$. Từ (1),(2),(3),(4) ta có $KBD = DKB \Rightarrow \Delta DBK$ cân tại D hay $DB = DK$. Vậy $DB = DC = DK\ (5)$.

BK và BJ lần lượt là đường phân giác trong và phân giác ngoài tại B nên BK vuông góc BJ. Ta có:

$$\begin{cases} DKB + DJB = 90^\circ = DBK + DBJ \\ DKB = DBK \end{cases} \Rightarrow DBJ = DJB \Rightarrow \Delta DBJ$$ cân tại D, suy ra $DB = DJ\ (6)$. Từ (5) và (6) ta có $DB = DC = DK = DJ$.

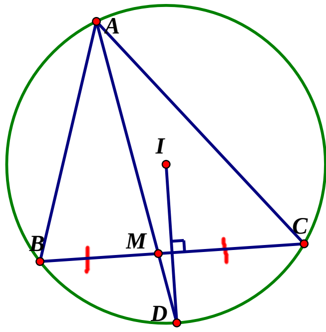
❖ ***Chú ý:***

1) D là giao giữa đường phân giác góc trong và đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Khi đó $DB = DC$ và rỏ ràng ID sẽ là đường trung trực của BC (vì IB=IC và DB=DC). Khi làm bài tập có khi ta sẽ sử dụng tính chất này.

2) Các em nên nhớ rằng đường tròn có tính chất đối xứng nên các kết quả có được từ đỉnh A cũng sẽ có ở đỉnh B và C. Ví dụ: trong bài toán trên, gọi E là giao điểm giữa BK và (C) thì E cũng sẽ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAKC. Chứng minh tương tự.

Ví dụ 11. Trong mặt phẳng Oxy.Cho ΔABC có $A(2;6)$, chân đường phân giác trong góc A là $M\left(2;\frac{-3}{2}\right)$ và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là $I\left(\frac{-1}{2};1\right)$.Xác định tọa độ các đỉnh B,C.

Giải



Đường tròn ngoại tiếp ΔABC có tâm $I\left(\frac{-1}{2};1\right)$ và bán kính bằng $R = IA = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ có phương trình $(C):\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(x-1)^2=\frac{125}{4}$.Đường thẳng AM đi qua M và A nên có phương trình có $AM: x-2=0$. Gọi $D = AM \cap (C)$,khi đó tọa độ điểm D là nghiệm của hệ

$\begin{cases}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(x-1)^2=\frac{125}{4}\\ x-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, y=6\\ x=2, y=-4\end{array}\right. \Rightarrow D(2;-4)$ (vì $\begin{cases}x=2\\ y=6\end{cases}$ là tọa độ điểm A).

Vì AM là đường phân giác trong góc A nên điểm D nằm chính giữa của cung BC, do đó $BC \perp ID$. BC đi qua M và có vtpt là $\overrightarrow{ID}=\left(\frac{5}{2};-5\right)$ có phương trình $BC: \frac{5}{2}(x-2)-5\left(y+\frac{3}{2}\right)=0 \Leftrightarrow BC: x-2y-5=0$.

$B,C = BC \cap (C)$ nên tọa độ B,C là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(x-1)^2=\frac{125}{4}\\ x-2y-5=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5, y=0\\ x=-3, y=-4\end{array}\right. \Rightarrow B(5;0), C(-3;-4) \vee B(-3;-4), C(5;0)$.

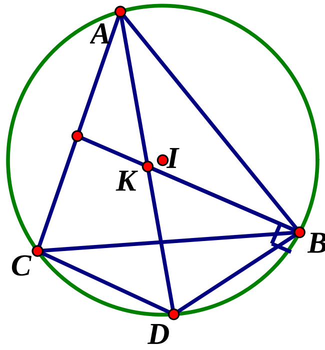
Vậy tọa độ các điểm cần tìm là $B(5;0), C(-3;-4)$ hoặc $B(-3;-4), C(5;0)$.

$BC: \frac{5}{2}(x-2)-5\left(y+\frac{3}{2}\right)=0 \Leftrightarrow BC: x-2y-5=0$. $B,C = BC \cap (C)$ nên tọa độ B,C là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(x-1)^2=\frac{125}{4}\\ x-2y-5=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5, y=0\\ x=-3, y=-4\end{array}\right. \Rightarrow B(5;0), C(-3;-4) \vee B(-3;-4), C(5;0)$. Vậy tọa độ các điểm cần tìm là $B(5;0), C(-3;-4)$ hoặc $B(-3;-4), C(5;0)$.

Ví dụ 12. Trong mặt phẳng Oxy.Cho ΔABC có $A\left(\frac{-7}{5};\frac{4}{5}\right)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(0;1)$ và tâm đường tròn nội tiếp $K(-1;1)$. Viết phương trình cạnh BC.

Giải



Đường tròn ngoại tiếp ΔABC có tâm $I\left(\frac{-1}{2};1\right)$ và bán kính bằng $IA=\sqrt{2}$ có phương trình $(C): x^2+(y-1)^2=2$. Đường thẳng AK đi A và có vtcp $\overrightarrow{AK}=\left(\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right)\uparrow\uparrow(2;1)$ suy ra AK có vtpt $\vec{n}=(1;-2)$ có phương trình $AK: 1(x+1)-2(y-1)=0 \Leftrightarrow AK: x-2y+3=0$.

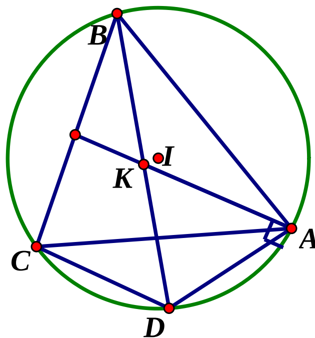
Gọi $D=AK\cap(C)$, khi đó tọa độ điểm D là nghiệm của hệ $\begin{cases} x^2+(y-1)^2=2 \\ x-2y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=2 \\ x=\frac{-7}{5}, y=\frac{4}{5} \end{array}\right. \Rightarrow D(1;2)$

(vì $\begin{cases} x=\frac{-7}{5} \\ y=\frac{4}{5} \end{cases}$ là tọa độ điểm A). Tam giác BKC nội tiếp đường tròn tâm D (xem **BT4**). Đường tròn ngoại tiếp tam giác BKC có tâm D và đường kính $DK=\sqrt{5}$ có phương trình $(C'): (x-1)^2+(y-2)^2=5$. Tọa độ điểm B và C là nghiệm của hệ pt: $\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2=5 \quad (1) \\ x^2+(y-1)^2=2 \quad (2) \end{cases}$. Lấy (2) trừ (1) ta được $2x+2y-1=0 \quad (d)$.

Vì tọa độ điểm B và C thỏa (d) nên phương trình đường thẳng đi qua B và C cần tìm là phương là $BC\equiv(d): 2x+2y-1=0$.

Ví dụ 13. Trong mặt phẳng Oxy.Cho ΔABC có $B(2;3)$, tâm đường tròn ngoại tiếp $I(6;6)$ và tâm đường tròn nội tiếp $K(4;5)$. Tìm tọa độ các đỉnh A,C.

Giải



Đường tròn ngoại tiếp ΔABC có tâm $I(6;6)$ và bán kính bằng $IB=5$ có phương trình $(C): (x-6)^2+(y-6)^2=5$. Đường thẳng BK đi B và K có phương trình $BK: x-y+1=0$. Gọi $D=BK\cap(C)$, khi đó tọa độ điểm D là nghiệm của hệ $\begin{cases} (x-6)^2+(y-6)^2=5 \\ x-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, y=3 \\ x=9, y=10 \end{array}\right. \Rightarrow D(9;10)$ (vì $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ là tọa độ điểm B). Tam giác AKC nội tiếp đường tròn tâm D (chứng minh như

BT4). Đường tròn ngoại tiếp tam giác AKC có tâm D và đường kính $DK=\sqrt{50}$ có phương trình

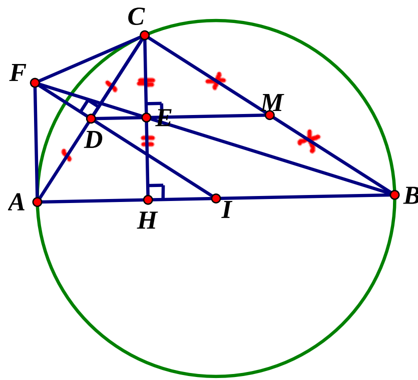
$(C'):(x-9)^2+(y-10)^2=50$. Tọa độ điểm A và C là nghiệm của hệ pt:

$\begin{cases}(x-9)^2+(y-10)^2=50\\(x-6)^2+(y-6)^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=9\end{cases}\vee\begin{cases}x=10\\y=3\end{cases}$. Vậy $A(2;9),C(10;3)$ hoặc $A(10;3),C(2;9)$.

5. Bài toán 5(BT5)

Cho đường tròn (C) tâm I,đường kính AB. Điểm C thuộc đường tròn (AC<BC). Kẻ CH vuông góc AB(H thuộc AB). D,E lần lượt là trung điểm của AC và CH. F là giao điểm của ID và BE. Chứng minh FA và FC là các tiếp tuyến của (C).

Chứng minh



Gọi M là giao điểm của DE và BC, khi đó M cũng là trung điểm của BC (vì $DE\parallel AB$). Do D là trung điểm của AC nên FI là đường trung trực của AC. $FD\parallel BC$ (cùng vuông góc AC), dẫn đến ΔEDF và ΔEMB đồng dạng $\Rightarrow\frac{EM}{ED}=\frac{EB}{EF}\quad(1)$.

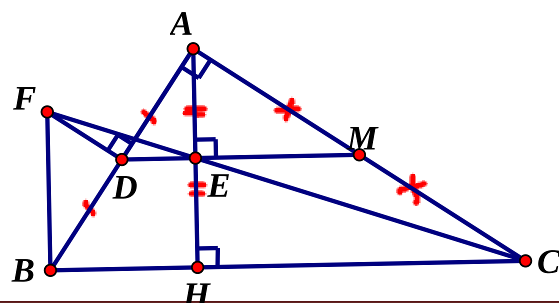
Mặt khác, $DE\parallel AH$ và $ME\parallel HB\Rightarrow\begin{cases}\frac{EM}{HB}=\frac{1}{2}\\\frac{ED}{HA}=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{EM}{ED}=\frac{HB}{HA}\quad(2)$. Từ

(1) và (2) suy ra $\frac{HB}{HA}=\frac{EB}{EF}\Rightarrow FA\parallel EH\Rightarrow FA\perp AB$. Suy ra FA là tiếp tuyến của (C). Từ

$\Delta FIA=\Delta FIC\Rightarrow FCI=FAI=90^\circ$ suy ra FC cũng là tiếp tuyến của (C).

Ví dụ 14. Trong mặt phẳng Oxy.Cho ΔABC vuông tại A,đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB và AH. Đường thẳng vuông góc AB tại D cắt CE tại $F(-1;3)$. Đường thẳng BC có phương trình $x-2y+1=0$. Tìm tọa độ các đỉnh của A,B,C biết rằng D thuộc đường thẳng $3x+5y=0$ và D có hoành độ dương.

Giải



Ta chứng minh được $FB\perp BC$ (xem **BT5**). Đường thẳng FB đi qua F(-1;3) và vuông góc BC nên FB có vtpt là $\vec{u}=(2;1)$. Phương trình đường thẳng

$BF:2(x+1)+1(y-3)=0\Leftrightarrow BF:2x+y-1=0$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ pt: $\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases} \begin{cases} x=\dfrac{1}{5} \\ y=\dfrac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow B\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{3}{5}\right)$.

Vì D thuộc đường thẳng $3x+5y=0$ nên suy ra:

$D\left(x_D;\dfrac{-3x_D}{5}\right);\overrightarrow{FD}=\left(x_D+1;\dfrac{-3x_D}{5}-3\right);\overrightarrow{BD}=\left(x_D-\dfrac{1}{5};\dfrac{-3x_D}{5}-\dfrac{3}{5}\right)$.Ta có :

$BD\perp FD\Leftrightarrow \overrightarrow{FD}.\overrightarrow{BD}=0\Leftrightarrow 17x_D^2+37x_D+20=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_D=-1(n) \\ x_D=-\dfrac{20}{17}(l) \end{array}\right.$.Vì D là trung điểm của AB nên

$A\left(\dfrac{-11}{5};\dfrac{3}{5}\right)$. Đường thẳng AC đi qua điểm $A\left(\dfrac{-11}{5};\dfrac{3}{5}\right)$ và có vtpt là $\overrightarrow{AB}\left(\dfrac{12}{5};0\right)$ có phương trình

$AC: x+\dfrac{11}{5}=0$. C là giao điểm của AC và BC suy ra $C\left(\dfrac{-11}{5};\dfrac{-3}{5}\right)$.

Vậy tọa độ các điểm cần tìm là $A\left(\dfrac{-11}{5};\dfrac{3}{5}\right),B\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{3}{5}\right),C\left(\dfrac{-11}{5};\dfrac{-3}{5}\right)$.

Ví dụ 15. Trong mặt phẳng Oxy.Cho ΔABC vuông tại A,đường cao AH. Gọi I là trung điểm của AH. Đường thẳng vuông góc với BC tại C cắt BI tại D. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC, biết phương trình $BC: x-y-2=0$ và D(-1;-1) và đỉnh A thuộc đường d: $3x-2y+6=0$.

<u>Phân Tích:</u> Trước tiên ta thấy DC vuông góc BC và đi qua điểm D nên ta viết được phương trình đường thẳng DC và có ngay tọa độ đỉnh C . Không khó để ta thấy rằng DA cũng là tiếp tuyến hay DA = DC . Từ đó tìm được điểm A và nhớ chú ý tam giác ABC vuông tại A để nhận và loại nghiệm.

Giải

Trước tiên ta thấy DC vuông góc BC và đi qua điểm D nên ta viết được phương trình đường thẳng DC: $x+y+2=0$.

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y-2=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}\Rightarrow C(0;-2)$. Gọi M là trung điểm của AC, N là giao điểm của MI và AB thì có ngay N cũng là trung điểm của AB(tính chất một đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song một cạnh thì đi qua trung điểm cạnh còn lại). Để chứng minh DA = DC. Ta chỉ cần chứng minh MD vuông góc AC(vì M đã là trung điểm AC). Tam giác ABH có đường trung bình IN nên $HB=2IN$ và tam giác ACH có đường

trung bình IM nên $HC = 2IN$. Mặt khác, do

$IH // DC \Rightarrow \frac{IB}{ID} = \frac{HB}{HC} \Rightarrow \frac{IB}{ID} = \frac{2IN}{2IM} \Rightarrow \frac{IB}{ID} = \frac{IN}{IM} \Rightarrow DM // BN$ (định lí talets đảo). Mà $BN \perp AC$ nên

$MD \perp AC$ suy ra tam giác DAC cân tại D $\Rightarrow DA = DC$. Ta có $DC = \sqrt{2}$ và A thuộc d suy ra $A\left(a;\frac{3a+6}{2}\right)$.

Ta có $DA = \sqrt{2} \Leftrightarrow (a+1)^2 + \left(\frac{3a+6}{2}+1\right)^2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-2 \Rightarrow A(-2;0) \\ a=\frac{-30}{13} \Rightarrow A\left(\frac{-30}{13};\frac{-6}{13}\right) \end{array}\right.$.

Loại điểm $A(-2;0)$ vì khi đó AC vuông góc BC. Vậy điểm $A\left(\frac{-30}{13};\frac{-6}{13}\right)$. AB vuông góc với AC và đi qua điểm A nên có phương trình $AB: 3x-2y+6=0$. Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ

$\begin{cases} 3x-2y+6=0 \\ x-y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-10 \\ y=-12 \end{cases} \Rightarrow B(-10;-12)$. Tam giác ABC vuông tại A nên nội tiếp đường tròn đường kính BC. Gọi I là trung điểm của BC, khi đó

I(-5;-7) và $IC = 5\sqrt{2}$. Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình

$(x+5)^2 + (x+7)^2 = 50$.

<u>Bài tập tự rèn luyện</u>:

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy.Cho ΔABC có trong tâm $G\left(1;\frac{8}{3}\right)$ và nội tiếp đường tròn

$(C): (x-2)^2 + (y-3)^2 = 26$. Điểm $M(7;2)$ thuộc đường thẳng đi qua A và vuông góc BC;M khác A. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết $y_B > y_C$.

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy.Cho ΔABC có trung điểm cạnh BC là $M(3;-1)$. Điểm E(-1;-3) thuộc đường cao đi qua B. Đường thẳng AC đi qua F(1;3). Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có đường kính

AD với D(4;-2).

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy.Cho ΔABC có trực tâm $H(3;0)$ và trung điểm cạnh BC là $M(6;1)$. Đường thẳng AH có phương trình $x+2y-3=0$. Gọi D và E lần lượt là chân đường cao hạ từ B và C của tam giác ABC. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết DE có phương trình $x-2=0$ và D có tung độ dương.

Bài 4. Trong mặt phẳng Oxy.Cho ΔABC có trực tâm $H(2;0)$ và tâm đường tròn nội tiếp $I(2;0)$. Phương trình cạnh BC: $x-y-4=0$. Lập phương trình cạnh AB, biết hoành độ của điểm B không lớn hơn 3.

Bài 5. Trong mặt phẳng Oxy.Cho ΔABC nội tiếp đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=25$. Các điểm K(-1;1) , H(2;5) lần lượt là chân đường cao hạ A và B. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết C có hoành độ dương.

Bài 6. Trong mặt phẳng Oxy.Cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm $I(3;5)$ và ngoại tiếp đường tròn tâm K(1;4). Đường tròn tiếp xúc với cạnh BC và các cạnh AB,AC kéo dài (đường tròn bàng tiếp cạnh BC) có tâm F(11;14). Viết phương trình cạnh BC và đường cao đi qua đỉnh A.

Bài 7. Trong mặt phẳng Oxy.Cho ΔABC nhọn có đỉnh A(-1;4),trực tâm H. Đường thẳng AH cắt BC tại M, đường thẳng CH cắt AB tại N. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HMN là I(2;0). Tìm tọa độ các đỉnh B,C của ΔABC, biết đỉnh B thuộc đường thẳng $d: x+2y-2=0$.

Bài 8. Trong mặt phẳng Oxy.Cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm $I(5;4)$ và có trực tâm H(5;5). Cạnh AC có phương trình $x+y-8=0$. Tính diện tích ΔABC.

Bài 9. Trong mặt phẳng Oxy.Cho ΔABC có trực tâm H(-1;3), tâm đường ngoại tiếp $I(3;-3)$, chân đường cao kẻ từ A là điểm K(-1;1). Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC.

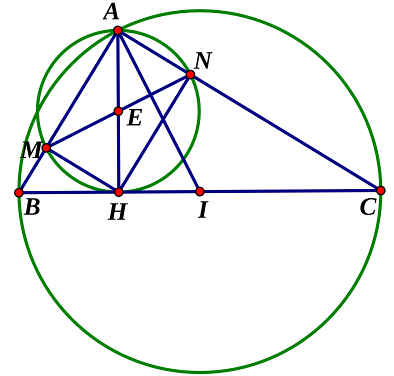
Bài 10. Trong mặt phẳng Oxy.Cho ΔABC có đỉnh A(-3;-4), tâm đường ngoại tiếp $I(2;1)$ và tâm đường tròn ngoại tiếp K(-1/2;1). Viết phương trình cạnh BC.

Phần 3. Rèn luyện tư duy phân tích,dự đoán tính chất và chứng minh

Ví dụ 16. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn đường kính BC có phương trình $(C): x^2+y^2-6x-2y+5=0$. H là chân đường cao kẻ từ A. Đường tròn đường kính AH cắt AB,AC lần lượt tại M và N. Tìm tọa độ đỉnh A và viết phương trình cạnh BC,biết MN có phương trình $20x-10y-9=0$ và H có hoành độ nhỏ hơn tung độ.

Phân tích: Trước hết ta có gắng vẻ hình chính xác và tổng hợp kỉ từng giả thuyết đường bỏ xót chi tiết nào. Ta có tam giác ABC vuông tại A(góc A chắn đường kính). Dể thấy AMHN là hình chử nhật. MN đã có phương trình,đường tròn đã có tâm và bán kính. Phương trình MN dùng để làm gì??Dự đoán được gì đây!!B,C không nhiều giả thuyết nên ta tập trung vào tìm điểm A. Điểm A đã thuộc đường tròn là đã có một phương trình,chỉ cần thêm một phương trình nửa là ra A. Ta nghĩ đến việc nối A và I (I là tâm đường tròn(C)) vì ở đây chỉ có tọa độ điểm I. Ta sẽ có cảm giác IA vuông góc MN???Thử vẻ thêm hình khác xem?Và nghĩ ngược lại,nếu IA vuông góc MN ta được gì?? Ak..Nếu IA vuông góc MN thì sẽ viết được phương trình IA$\Rightarrow A$!!Khi có A thì việc tiếp theo sẽ dễ hơn. Vậy ta có thể tin rằng IA vuông góc MN và đi chứng minh. Lời giải chi tiết.

Giải:



Đường tròn (C) có tâm I(3;1) và bán kính $R=\sqrt{5}$. Do

$IA=IC \Rightarrow IAC=ICA$ (1). Đường tròn đường kính AH cắt AB tại M

$\Rightarrow MH \perp AB \Rightarrow MH \parallel AC$ (cùng vuông góc AB) suy ra $MHB=ICA$ (2)

. Ta có $AHM=ANM$ (3)(cùng chắn AM). Từ (1) ,(2) và (3) ta có

$\begin{cases} ANM=AHM \\ IAC=MHB \end{cases} \Rightarrow IAC+ANM=MHB+AHM=90^\circ \Rightarrow IA\perp MN$. IA đi qua I và IA vuông góc MN phương trình $IA: x+2y-5=0$. Điểm A là giao điểm giữa IA và đường tròn (C) nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} x+2y-5=0 \\ x^2+y^2-6x-2y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=2 \\ x=5, y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow A(1;2)\vee A(5;0)$ **.** Ta loại $A(5;0)$ vì I,A nằm cùng phía so với đường thẳng MN. Ta nhận $A(1;2)$ vì I,A nằm khác phía so với đường thẳng MN. Tứ giác AMHN là hình chữ nhật (có 3 góc vuông). Gọi E là trung điểm của AH thì E cũng là trung điểm của MN. Do

$E\in MN \Rightarrow E\left(t;2t-\frac{9}{10}\right)$.Do E là trung điểm của AH $\Rightarrow H\left(2t-1;4t-\frac{19}{5}\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}=\left(2t-2;4t-\frac{58}{10}\right);\overrightarrow{IH}=\left(2t-4;4t-\frac{48}{10}\right)$. Do IH vuông góc AH suy ra:

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{IH}=0 \Leftrightarrow 20t^2-\frac{272}{5}t+\frac{896}{25}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{8}{5}\Rightarrow H\left(\frac{11}{5};\frac{13}{5}\right)(l) \\ t=\frac{28}{25}\Rightarrow H\left(\frac{31}{25};\frac{17}{25}\right)(n) \end{array}\right.$$.

Khi đó BC đi H và có vtpt là $\overrightarrow{AH}$ nên có phương trình $BC: 2x+y-7=0$.

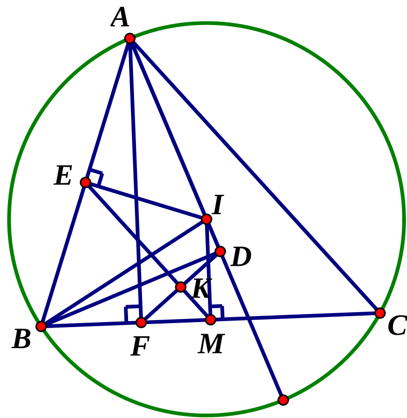
Vậy $A(1;2)$ và $BC: 2x+y-7=0$.

<u>Bình luận:</u>Đây là bài toán xuất phát từ bài toán lớp 9 khá quen thuộc. Và lớp 9 đề bài yêu cầu luôn chứng minh IA vuông góc MN. Khi dự đoán ta thử nghĩ ngược lại đều mình dự đoán có ý nghĩa gì??? Có giải bài toán không?? Và mấu chốt là phải tìm yếu tố đầu tiên. Các Em thử giải bài sau trước khi xem lời giải nhé! Thầy nghĩ đến các bài tiếp theo thì các em sẽ dự đoán chính xác các tính chất hình trong bài toán!
Và phần còn lại cố gắng chứng minh.

Ví dụ 17. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm I, điểm M(2;-1) là trung điểm của cạnh BC. Hình chiếu vuông góc của B trên AI là $D\left(\frac{9}{5};\frac{-8}{5}\right)$.

Biết rằng AC có phương trình $x+y-5=0$,tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC.

Phân tích:Bài toán ẩn khá kĩ tính chất sử dụng ở đây. Ta có thể bối rối lúc đầu không biết xuất phát từ đâu. Xem kỉ giả thuyết đã,ta có phương trình cạnh AC, tọa độ đỉnh D và trung điểm M của BC. Rõ ràng AC không tham gia vào việc tư duy, vậy nó phục vụ để tìm A hoặc C trước. Điểm D tạo ra thế nào?? Khi thấy có nhiều góc vuông ta nghĩ đến tứ giác nội tiếp, đó cũng là một kinh nghiệm. Tam giác ABD vuông tại D nên sẽ nội tiếp đường tròn (T) tâm E(E là trung điểm AB). Ak... phương trình ME ta viết được vì ME song song AC(ME là đường trung bình của ΔABC). Đã tiến được một tí rồi. Điểm D chưa khai thác?? Ta thử tạo ra tứ giác nội tiếp, bằng cách kẻ đường cao AF. Rõ ràng F thuộc (T). ABFD nội tiếp (T). Thử nối D với các điểm khác xem có phát hiện gì không??? Ta sẽ thấy nổi bậc DF dường như vuông với EM, mà nếu thật vậy thì ME sẽ là đường trung trực của DF luôn (vì EF=ED). Nghĩ ngược lại ME là đường trung trực của DF ta được gì?? Rõ ràng nếu ME là đường trung trực của DF ta sẽ tìm được F,vì ME đã có phương trình và D đã có. Mà khi có F sẽ có phương trình BC,từ đó có điểm C trước ,dẫn đến có B (vì M là trung điểm BC). AF đi qua F và vuông góc BC nên cũng có phương trình. Vậy có luôn điểm A. Vậy dự đoán này có vẻ hợp lí?? Ta cần chứng minh ME là đường trung trực của DF???Muốn vậy ta chỉ cân chứng minh ME là phân giác EDF hoặc $ME \perp DF$ (vì EF=ED).



Giải

Gọi E là trung điểm AB và F là chân đường cao kẻ từ A. Ta có tứ giác ABFD nội tiếp đường tròn (T) tâm E. Ta có: $DFM = DAB$ (1) (góc ngoài của tứ giác nội tiếp) và $FME = MCA$ (2). Mà $MCA = \frac{1}{2}BIA = EIA$ (3) (góc nội tiếp bằng một nửa góc ở tâm). Từ (1),(2) và (3) ta có: $DFM + FME = DAB + EIA = 90^\circ \Rightarrow ME \perp DF$. Mà ED=EF (D và F thuộc đường tròn tâm E). Do đó ME là đường trung trực của DF. ME song song AC và đi qua M nên có phương trình $ME: x+y-1=0$. DF vuông góc ME và đi qua D nên có phương trình DF: $x-y-\frac{17}{5}=0$. Gọi K là giao điểm của DF và ME $\Rightarrow K\left(\frac{11}{5};\frac{-6}{5}\right) \Rightarrow F\left(\frac{13}{5};\frac{-4}{5}\right)$(vì K là trung điểm của DF). BC đi qua M(2;-1) và $F\left(\frac{13}{5};\frac{-4}{5}\right)$ nên có phương trình $BC: x-3y-5=0$. Điểm C là giao điểm của BC và AC nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-3y-5=0 \\ x+y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow C(5;0)$. Điểm M là trung điểm của BC nên ta có B(-1;-2).

Đường thẳng AF đi qua F và vuông góc BC nên có phương trình $AF:3x+y-\frac{33}{5}=0$. Điểm A là giao điểm của AF và AC nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases}3x+y-\frac{33}{5}=0\\ x+y-5=0\end{cases}\Rightarrow A(1;4)$.

Vậy tọa độ các điểm cần tìm là : $A(1;4), B(-1;-2), C(5;0)$.

Bình luận: Có lẻ các Em thắc mắc tại sao lại dự đoán được như vậy?? Đừng nản chí, các Em sẽ tự nhận ra được câu trả lời qua các bài phía sau. Ak…! Ở bài toán trên để chứng minh ME là đường trung trực của DF ta có thể xem thử cách 2 này nhé:

Các điểm E,B,M,I,D cùng thuộc đường tròn đường kính BI. Và EBFE thuộc đường tròn tâm E. Ta có:

$DEM = DBE = \frac{1}{2}DEF$ suy ra ME là đường phân giác DEF. Mà DE=DF, do đó ME là đường trung trực của DF.

Kết quả cần nhớ qua ví dụ 17:

Cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm I; D là chân đường cao kẻ từ A; M và N lần lượt là trung điểm của BC và AB; E là hình chiếu của B trên AI. Khi đó:

a) DE vuông góc AC.

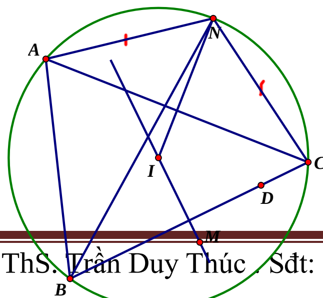
b) MN là đường trung trực của DE.

Em nhớ chứng minh trước khi áp dụng vào giải bài toán .

Ví dụ 18. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC vơi AB < AC có tâm đường tròn ngoại tiếp I(-1;0). Điểm M(3;3) nằm trên đường trung trực của BC và N(2;4) thuộc đường phân giác trong góc B sao cho AN=CN. Đường thẳng BC đi qua điểm D(1;4) và B có tung độ lớn hơn C. Xác định tọa độ các đỉnh của ΔABC.

Phân tích: Cần nhớ: Tâm đường tròn ngoại tiếp là giao điểm của ba đường trung trực ba cạnh của tam giác.Trước tiên M thuộc đường trung trực của BC nên IM vuông góc BC và D thuộc BC ta viết ngay phương trình cạnh BC. Tiếp theo AN=NC tức là N thuộc đường trung trực AC. Mà N lại thuộc đường phân giác trong góc B. Ta thấy ngay N thuộc đường tròn. Vậy có có phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp ΔABC có tâm I và bán kính IN. Giao BC và (C) ta có được B,C. Đường thẳng AC đi qua C và vuông góc IN nên ta viết được AC và giao AC với (C) ta có A.

Giải



Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp ΔABC .Do NA=NC nên N nằm trên đường trung trực của AC. $\begin{cases}AIC=2ABC\\ AIC=2NIC\end{cases}\Rightarrow NIC = ABC = 2NBC \Rightarrow N\in(C)$. Đường

tròn (C) có tâm I(-1;0) và bán kính $R = IN = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ có phương trình $(C): (x+1)^2 + y^2 = 25$. Đường thẳng BC đi qua D(1;4) và có vtpt là $\overrightarrow{IM} = (4;3)$ có phương trình $BC: 4x + 3y - 16 = 0$. Điểm B,C là giao điểm của BC và (C) nên tọa độ của B, C là nghiệm của hệ $\begin{cases}(x+1)^2 + y^2 = 25 \\ 4x + 3y - 16 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 4 \\ y = 0\end{cases} \vee \begin{cases}x = \dfrac{2}{5} \\ y = \dfrac{24}{5}\end{cases}$. Do

$y_B > y_C$ nên $B\left(\frac{2}{5}; \frac{24}{5}\right), C(4;0)$. AC đi qua C và vuông góc IN nên có phương trình $AC: 3x + 4y - 12 = 0$.

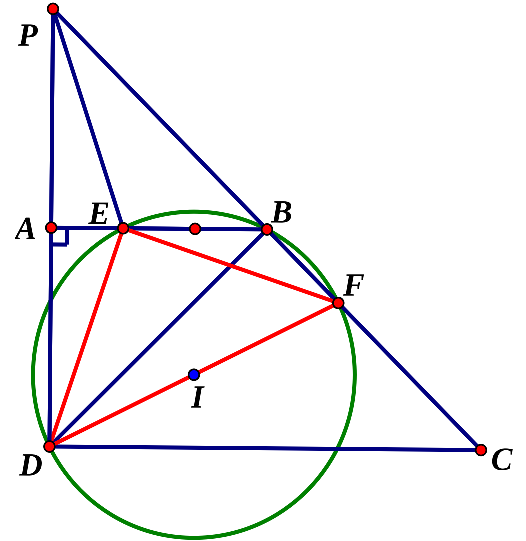
Điểm A là giao điểm của AC và (C) nên tọa độ của A là nghiệm của hệ

$\begin{cases}(x+1)^2 + y^2 = 25 \\ 3x + 4y - 12 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 4 \\ y = 0\end{cases} \vee \begin{cases}x = -\dfrac{12}{5} \\ y = \dfrac{24}{5}\end{cases}$. Loại $\begin{cases}x = 4 \\ y = 0\end{cases}$ vì trùng điểm C,vậy $A\left(-\frac{12}{5}; \frac{24}{5}\right)$. Tọa độ các điểm cần tìm là: $A\left(-\frac{12}{5}; \frac{24}{5}\right), B\left(\frac{2}{5}; \frac{24}{5}\right), C(4;0)$.

Ví dụ 19. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình thang ABCD vuông tại A và D có $CD = 2AD = 2AB$, gọi E(2;4) là điểm thuộc đoan AB sao cho $AB = 3AE$. Điểm F thuộc BC sao cho ΔDEF cân tại E. Phương trình EF là $2x + y - 8 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thang biết D thuộc đường thẳng $d: x + y = 0$ và điểm A hoành độ nguyên và thuộc đường thẳng $d': 3x + y - 8 = 0$.

Phân tích: Đối với các bài toán hình học phẳng các Em cần vẽ hình chính xác và sử dụng hết giả thuyết.! Ở bài này ta thấy rằng điểm A thuộc $d': 3x + y - 8 = 0$ và D thuộc $d: x + y = 0$. Nên ta định hướng tìm D và A trước. Xem các điểm E và F được tạo ra thế nào và có mối liên hệ với điểm nào??Phương trình EF dùng làm gì?? Thử nối E với A và D, ta sẽ có cảm giác ED vuông góc EF?? Các Em có thấy vậy không?? Thử suy nghĩ nếu ED vuông góc EF ta được gì?? Ak… Khi đó ta sẽ viết được phương trình DE vậy là có được điểm D! Có vẽ dự đoán này khả quan và khi đó tìm cách chứng minh xem?? Ak.. Còn tỉ lệ các đoạn thẳng thì sao??Tìm A thế nào??Khi đã có D ta sẽ có độ dài DE và nhờ tỉ lệ các đoạn thẳng ta tính được độ dài AE suy ra điểm A. Ở đây có một cách chứng minh bằng phương pháp mượn hệ trục tọa độ mới! Rất hiệu quả,nhưng phạm vi sử dụng hẹp. Chủ yếu đối với các bài có góc vuông và tỉ lệ các cạnh Thầy sẽ giới thiệu vào một chương sau .Trong bài này Thầy sẽ hướng dẫn chứng minh trực tiếp!

Giải



Gọi P là điểm đối xứng của D qua A. Ta có

$AB = AD = \frac{1}{2}DP \Rightarrow \Delta DBP$ vuông tại B. Mặt khác ΔABD

vuông cân tại A nên $ADB = 45^\circ$. Do đó ΔDBP vuông cân tại B $\Rightarrow BA$ là đường trung trực của DP $\Rightarrow ED = EP$, mà $ED = EF$, do đó E là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDPF. Suy ra

$DEF = 2DPF = 90^\circ \Rightarrow ED \perp EF$. Đường thẳng ED vuông góc EF và đi qua điểm D nên có phương trình $DE: x - 2y - 6 = 0$

.Điểm $D = ED \cap d$ nên tọa độ của D là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y - 6 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow D(-2;2)$.

Ta có $DE^2 = 20$, xét ΔAED vuông tại A, có $DE^2 = AE^2 + AD^2 = 20$. Mà $3AE = AD = AB$ suy ra $10AE^2 = 20 \Leftrightarrow AE^2 = 2 \quad (*)$. Do A thuộc $d': 3x + y - 8 = 0 \Rightarrow A(a;8-3a)$. Từ

$$(*) \Rightarrow (a-2)^2 + (4-3a)^2 = 2 \Leftrightarrow 5a^2 - 14a + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = \frac{9}{5} \end{array}\right..$$

Do A có tọa độ nguyên $\Rightarrow A(1;5)$.

Ta có $\overrightarrow{EB} = -2\overrightarrow{EA} \Rightarrow \begin{cases} x_B - 2 = 2 \\ y_B - 4 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = 4 \\ y_B = 2 \end{cases} \Rightarrow B(4;2)$.

Ta có $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} x_C + 2 = 6 \\ y_C - 4 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 4 \\ y_C = -4 \end{cases} \Rightarrow C(4;-4)$.

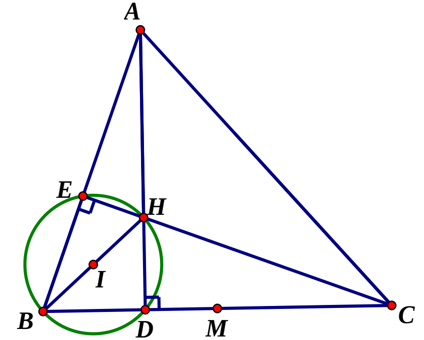
Vậy tọa độ các điểm cần tìm là : $A(1;5), B(4;2), C(4;-4), D(-2;2)$.

Bình luận: Mấu chốt của bài toán là phải thấy ED vuông góc EF. Ta có một cách khác để chứng minh ED vuông góc EF chỉ phụ thuộc vào tính toán bằng cách mượn hệ trục tọa độ. Thầy sẽ giới thiệu trong chương sau. Phương pháp này hiệu quả, không cần suy nghĩ nhiều nhưng phạm vi sữ dụng hẹp. Thường dùng cho bài toán có góc vuông và tỉ lệ các cạnh.

Ví dụ 20. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có trực tâm H, gọi D và E lần lượt là chân đường cao hạ từ A và C. Điểm M(2;3/2) là trung điểm của BC. Đường tròn (C) ngoại tiếp ΔDHE có phương trình $(C): (x-4)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 25$. Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC, biết đỉnh C thuộc đường thẳng $d: x - 2y + 2 = 0$ và điểm B có hoành độ dương.

Phân tích: Trước hết ta thấy điểm C thuộc đường thẳng d nên tọa độ của C chỉ một ẩn và M(2;3/2) là trung điểm của BC nên tọa độ của B cũng chỉ một ẩn. Thêm vào $x_B > 0$ nên ta nghĩ đên tìm điểm B trước. Khi bài toán có nhiều góc vuông ta nghĩ đến các tứ giác nội tiếp nhé. Không khó để thấy tứ giác BDHE nội tiếp, suy ra B thuộc (C) từ đây tìm được B. Xem như đã ổn!

Giải



Ta có $BEH + BDH = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác BDHE nội tiếp $\Rightarrow B \in (C)$.

Do $C \in d : x - 2y + 2 = 0 \Rightarrow C(2t-2;t)$.

Mà M là trung điểm của BC $B(6-2t;3-t)$.

Điểm $B \in (C) \Rightarrow (2-2t)^2 + \left(\frac{7}{2}-t\right)^2 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{7}{2} \Rightarrow B\left(-1;\frac{-1}{2}\right)(l) \\ t = \frac{-1}{2} \Rightarrow B\left(7;\frac{7}{2}\right)(n) \end{array}\right.$.

M là trung điểm của BC suy ra $C\left(-3;\frac{-1}{2}\right)$. Đường tròn (C) có tâm I(4;1/2) là trung điểm của HB suy ra $H\left(1;-\frac{5}{2}\right)$. Đường thẳng AH đi qua H và có $\overrightarrow{BC}$ là vtpt nên có phương trình $AH : 5x + 2y = 0$. Đường thẳng AB đi qua B và có $\overrightarrow{CH}$ là vtpt nên có phương trình $AB : 2x - y + \frac{15}{2} = 0$. Ta có $A = AB \cap AH$ nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x - y + \frac{15}{2} = 0 \\ 5x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-5}{3} \\ y = \frac{25}{6} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{-5}{3};\frac{25}{6}\right)$.

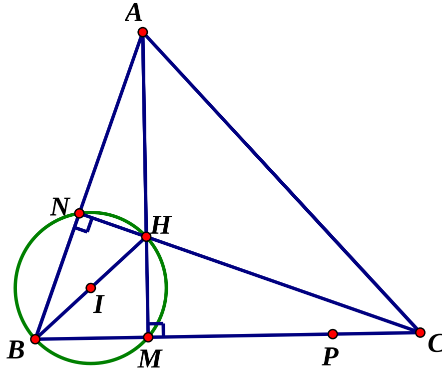
Vậy tọa độ các điểm cần tìm là : $A\left(\frac{-5}{3};\frac{25}{6}\right), B\left(7;\frac{7}{2}\right), C\left(-3;\frac{-1}{2}\right)$.

Bình luận: Cẩn thận các kiểu đánh lừa đường tròn ngoại tiếp tam giác có thể các điểm ta cần tìm thuộc vào đường tròn đó! Phân tích và thử suy ngược lại xem được gì nhé. Ta thử sức một bài cùng loại nhé! Để sử dụng tài liệu hiệu quả, một lời khuyên là các Em hãy tự làm trước khi xem bài giải nhé.

Ví dụ 21. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC nhọn có đỉnh A(-1;4), trực tâm H. Đường thẳng AH cắt BC tại M và CH cắt AB tại N. Tâm đường tròn ngoại tiếp ΔHMN là I(2;0),đường thẳng BC đi qua điểm P(1;2). Tìm tọa độ các đỉnh B,C của tam giác biết đỉnh B thuộc đường thẳng $d : x + 2y - 2 = 0$.

Phân tích: Tương tự như bài trước đó, ta có tứ giác BMHN nội tiếp đường tròn đường kính BH. Khi đó I là trung điểm của BH. B thuộc đường thẳng d nên có một ẩn suy ra H cũng có một ẩn. Từ $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BP} = 0 \Rightarrow H, B$. Vậy là xong nhé…!

Giải



Ta có $BMH = BNH = 90^\circ \Rightarrow$ bốn điểm BNHM cùng thuộc đường tròn đường kính BH.

$B \in d \Rightarrow B(2-2t;t)$, I là trung điểm của BH suy ra

$H(2+2t;-t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (3+2t;-t-4), \overrightarrow{BH} = (2t-1;-t-2)$.

Do H là trực tâm của ΔABC

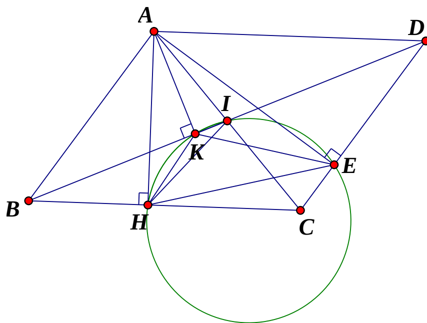
$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH} = 0 \Leftrightarrow 5t^2 + 10t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ **.** Suy ra H(0;1), B(4;-1).

Đường thẳng AC đi qua A và có vtpt là $\overrightarrow{BH} = (4;-2)$ có phương trình $AC: 2x - y + 6 = 0$. Đường thẳng BC đi qua B và P có phương trình $BC: x - 3y - 7 = 0$. Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ

$\begin{cases} 2x - y + 6 = 0 \\ x - 3y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-5;-4)$.Vậy tọa độ các điểm cần tìm là: B(4;-1) và C(-5;-4).

Ví dụ 22. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình bình hành ABCD có ABC nhọn, đỉnh A(-2;-1). Gọi H,K,E lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng BC,BD,CD. Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔHKE là $(C): x^2 + y^2 + x + 4y + 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B,C,D biết H có hoành độ âm. Điểm C có hoành độ dương và thuộc đường thẳng $x - y - 3 = 0$.

<u>Phân tích:</u> Các em cố gắng vẻ hình tốt và ghi ra các giả thuyết, phân tích xem tìm điểm nào trước. Rõ ràng ta suy nghĩ đến điểm C và H trước vì hai điểm này có nhiều điều kiện hơn. Lại thấy đường tròn ngoại tiếp, giá như mà điểm C cũng thuộc (C) thì tốt quá nhỉ?? Thật không may,khi vẽ đường tròn ra các em sẽ nhân ra rằng điểm C không thuộc (C). Nếu vẽ tốt ta sẽ thấy rằng đường tròn (C) dường như đi qua tâm I của hình bình hành?? Liệu thật vậy ta được gì?? Điểm C một ẩn và điểm A đã có vậy sẽ tính được I theo một ẩn của C(vì I là trung điểm AC). Mà I thuộc (C) ta sẽ tìm được I!! Có vẽ hợp lí rồi! Vậy ta cố gắng chứng minh I thuộc (C), muốn vậy ta chứng minh tứ giác IKHE nội tiếp..! Các Em theo dõi bài giải chi tiết nhé..!



Giải

Ta có $AHC = AEC = 90^\circ \Rightarrow$ bốn điểm A,H,C,E cùng thuộc đường tròn đường kính AC. Gọi I là tâm của hình bình hành. Ta có $HIE = 2HAE = 2(180^\circ - BCD)$. Các tứ giác AKED,AKHB nội tiếp

nên $\begin{cases} EKD = EAD \\ BKH = BAH \end{cases}$.

Do đó:

$$HKE = 180^\circ - EKD - BKH = 180^\circ - EAD - BAH = \left(90^\circ - EAD\right) + \left(90^\circ - BAH\right) = ABC + ADC = 2\left(180^\circ - BCD\right) = HIE.$$

Suy ra tứ giác HKIE nội tiếp . Dẫn đến điểm I thuộc đường tròn (C) ngoại tiếp ΔHKE.

Gọi $C\left(c; c-3\right) \in d, \left(c > 0\right) \Rightarrow I\left(\frac{c-2}{2}; \frac{c-4}{2}\right)$. Do I thuộc (C) nên ta có phương trình

$c^2 - c - 2 = 0 \Leftrightarrow c = 2 \vee c = -1$ (loại vì c>0). Suy ra $C\left(2;-1\right)$ và $I\left(0;-1\right)$.Điểm E,H nằm trên đường tròn đường kính AC và đường tròn (C) nên tọa độ thỏa mản hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + 4y + 3 = 0 \\ x^2 + \left(y+1\right)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, y = -3 \\ x = -\frac{8}{5}, y = -\frac{11}{5} \end{array}\right.$$

Vì điểm H có hoành độ âm $H\left(-\frac{8}{5}; -\frac{11}{5}\right), E\left(0;3\right)$. Đường thẳng BC đi qua H và C nên có phương trình $BC: x - 3y - 5 = 0$. Đường thẳng AB đi qua A song song CE nên có phương trình $AB: x - y + 1 = 0$. Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - 3y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow B\left(-4;-3\right) \Rightarrow \overrightarrow{BA} = \left(2;2\right), \overrightarrow{BC} = \left(6;2\right) \Rightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 16 > 0 (t/m).$$

Vì $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow D\left(4;1\right)$. Vậy $B\left(-4;-3\right), C\left(2;-1\right), D\left(4;1\right)$.

Bình luận: Tới đây Thầy nghĩ khả năng phân tích của các Em đã tiến bộ hơn rồi chứ!.Thầy nghĩ phần còn lại là rèn luyện cách chứng minh và kỉ năng tính toán thật tốt.

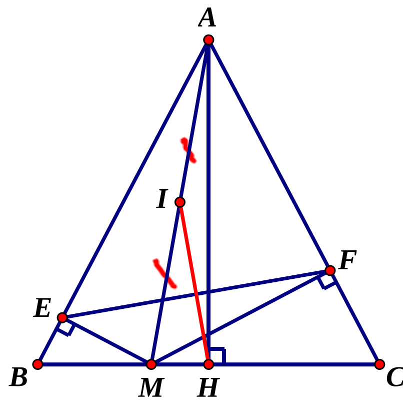
Ví dụ 23. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC cân tại A. Điểm M thuộc BC(M khác trung điểm của BC). Các điểm E,F lần lượt là hình chiếu của M trên cạnh AB và AC và $EF: 2x + y + 8 = 0$ .Cạnh BC có phương trình $x - y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC, biết I(1;2) là trung điểm của AM và E có hoành độ dương.

Phân tích: Chắc chắn là ta phải nghĩ đến tìm điểm E,F,M hoặc điểm nào đó thuộc cạnh BC. Vì các điểm này đã thuộc một đường thẳng có phương trình. Đề cho ΔABC cân tại A?? Ta xem được gì? Ta thử nghĩ đến trung điểm H của BC và AH là đường cao và đường phân giác của ΔABC. Ta dễ nhận ra các điểm A,E,M,H,F thuộc đường tròn đường tâm I, với I là trung điểm của AM, vì $MEA = MFA = MHA = 90^\circ$.

Thử nối IH lại ta sẽ thấy $IH \perp EF$?? Nếu thật vậy ta sẽ có được tọa độ điểm H ? Ta xem bài giải chi tiết nhé…!

Giải

Gọi H là trung điểm của BC và I là trung điểm của AM. Ta có: $MEA = MFA = MHA = 90^\circ$ suy ra các điểm A,E,M,H,F thuộc đường tròn (C) tâm I $\Rightarrow IE = IF(1)$. Mặt khác, ΔABC cân tại A suy ra:



$EAH = FAH \Rightarrow HE = HF(2)$ (tính chất của góc nội tiếp). Từ (1) và (2) dẫn đến IH là đương trung trực của EF nên IH vuông góc EF. Ta có $IH \perp EF \Rightarrow IH: x-2y+m=0$, mà $I \in IH \Rightarrow IH: x-2y+3=0$. Điểm $H = IH \cap BC \Rightarrow H(5;4)$. Đường tròn (C) tâm I(1;2) và bán kính $R = IH = 2\sqrt{5}$ có phương trình $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=20$.Đường thẳng AH đi qua H(5;4) vuông góc BC nên có phương trình $AH: x+y-9=0$.

Điểm $A = AH \cap (C)$ nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=20\\ x+y-9=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=5, y=4\\ x=3, y=6\end{array}\right.$. Điểm A(5;4) loại vì trùng H, nên A(3;6).

Các điểm $E, F = EF \cap (C)$ nên tọa độ E,F là nghiệm của hệ:

$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=20\\ 2x+y+8=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1, y=6\\ x=3, y=-2\end{array}\right.$. Vì E có hoành độ dương nên E(3;2) và F(-1;6).

Đường thẳng AB đi qua điểm A(3;6) và E(3;2) nên có phương trình $AB: y=3$. Điểm $B = AB \cap BC \Rightarrow B(4;3)$. Điểm H là trung điểm của BC nên C(6;5).

Vậy tọa độ các điểm cần tìm là A(3;6), B(4;3), C(6;5).

<u>Kết quả cần nhớ qua ví dụ 18:</u>

Cho ΔABC cân tại A; M là điểm thuộc đoạn BC (khác trung điểm của BC); E và F lần lượt là hình chiếu của M trên AB và AC; I là trung điểm của AM; H là trung điểm của BC. Khi đó:

a) Các điểm A,E,M,H,F cùng thuộc đường tròn tâm I.

b) HI là đường trung trực của EF.

Em nhớ chứng minh trước khi áp dụng vào giải bài toán nhé…!

Ví dụ 24. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC nội tiếp đường tròn (C) tâm I. D là điểm chính giữa của cung BC không chứa A). P(4;5) là giao điểm của AB và DC. Phương trình đường

tròn ngoại tiếp ΔAPC có phương trình $(T): x^2+(y-2)^2=25$. Phương trình đường thẳng DI: $x+2y-10=0$ Tìm các đỉnh của ΔABC.

Phân tích: Gọi K là tâm đường tròn (T). Một số sai lầm có thể xãy ra là ta dự đoán $PK=PD$ hoặc $PK\perp PD$ vì vẽ hình đôi khi vô tình vậy! Bởi vì có một trong hai điều trên cũng tìm được D. Nhưng chứng minh không được. Chịu khó vẽ hình lại ta sẽ thấy dự đoán trên sai. Rõ ràng ta phải chuyển các yếu tố của (C) qua (T) vì (C) chưa có phương trình.

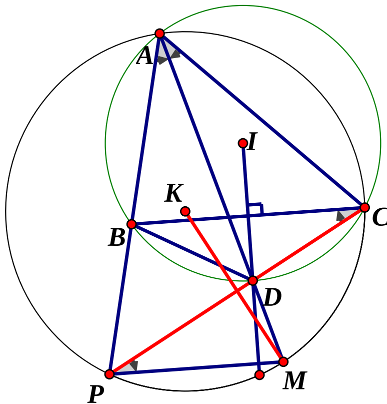
Gọi $M=AD\cap(T)$,cần nhớ AM là đường phân giác góc A(vì D nằm chính giữa cung BC). Vậy

$PAM=CAM \Rightarrow MP=MC$ (tính chất góc nội tiếp trên đường tròn (T)).

Vậy KM là đường trung trực của PC. Nếu tìm được M là xong?? Phương trình ID dùng làm gì ??AK.. Nối PM ta sẽ thấy PM song song BC?? Nếu vậy qua tốt $PM \parallel BC \Rightarrow BM\perp ID$. Khi đó sẽ viết được phương trình PM và có ngay điểm M, dẫn đến có C.

Ta xem bài giải chi tiết nhé…!

Giải



Đường tròn (T) có tâm K(0;2). Gọi $M=AD\cap(T)$,do D nằm chính giữa cung BC nên AD là đường phân giác trong của góc A. Xét trên đường tròn (C) có $DAB=DCB$ (cùng chắn DB),mà $DAB=DAC$ suy ra $DAB=DAC=DBC(1)$. Xét trên đường tròn (T) có $MPC=MAC(2)$. Từ (1) và (2) suy ra $MPC=PCB \Rightarrow PM \parallel BC$. Mà BC vuông góc ID nên PM cũng vuông góc ID. PM đi qua P và vuông góc ID có phương trình $2x-y-3=0$. Điểm $M=PM\cap(T)$nên tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} x^2+(y-2)^2=25 \\ 2x-y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=-3 \\ x=4, y=5 \end{array}\right.$. Điểm M(4;5) loại vì trùng P, nên M(0;-3). Do $KP=KC$ và $MP=MC$ nên KM là đường trung trực của PC. KM đi qua M và K có phương trình $x=0$. PC đi qua B và vuông góc KM nên có phương trình $y=5$. Gọi

$N=PC\cap KM \Rightarrow N(0;5) \Rightarrow C(-4;5)$.

BC đi qua C và vuông góc ID nên có phương trình $BC: 2x-y+13=0$. ID là đường trung trực của BC nên ta tìm được $B\left(\frac{92}{5};\frac{-11}{5}\right)$. AP đi qua P và P nên có phương trình $AP: x+2y-14=0$.

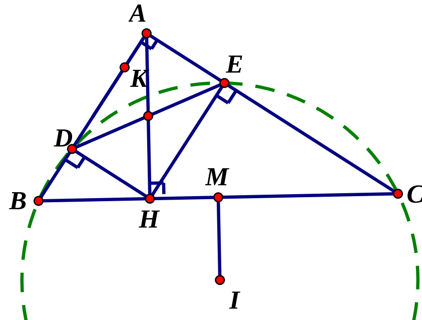
Điểm $A=AP\cap(T)$nên tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} x^2+(y-2)^2=25 \\ x+2y-14=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=7 \\ x=4, y=5 \end{array}\right.$. Điểm A(4;5) loại vì trùng P, nên A(0;7).

Vậy tọa độ các điểm cần tìm là A(0;7), $B\left(\frac{92}{5};\frac{-11}{5}\right)$, C(-4;5).

Ví dụ 25. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC vuông tại A, có H là chân đường cao kẻ từ A. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của H trên cạnh AB và AC. Điểm K(-1;2) thuộc AB và M(0;-1) là trung điểm của BC. Đường tròn ngoại tiếp ΔCDE có phương trình $(C):(x-1)^2+(y-3)^2=10$. Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC, biết B có hoành độ dương.

Giải



Ta có ADHE là hình chữ nhật $\Rightarrow ADE = AHE\,(1)$,

Mà $\begin{cases} AHE+EHC=90^\circ \\ EHC+ECH=90^\circ \end{cases} \Rightarrow AHE = ECH\,(2)$. Từ (1) và (2) suy ra

$ADE = ECH \Rightarrow$ tứ giác DBCE nội tiếp. Do đó các điểm B,C,D,E cùng thuộc đường tròn (C). Đường tròn (C) có tâm I(1;3). Do M là trung điểm của BC nên IM là đường trung trực của BC. BC đi qua M và vuông góc IM nên có phương trình $BC: x+2y-2=0$. Ta có $B,C = BC \cap (C)$ nên tọa độ điểm B và C là nghiệm của hệ:

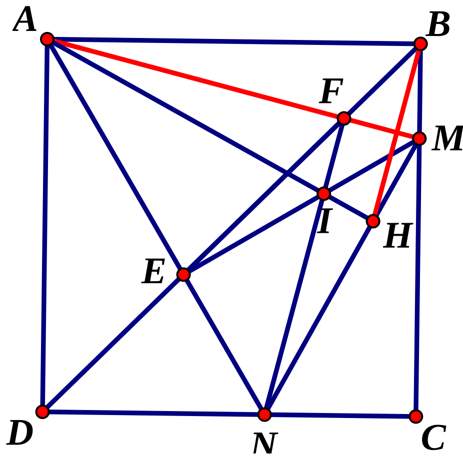
$\begin{cases} (x-1)^2+(y-3)^2=10 \\ x+2y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, y=0 \\ x=-2, y=2 \end{array}\right.$. Do điểm B có hoành độ dương nên B(2;0) và C(-2;2).

Đường thẳng AB đi qua B và K nên có phương trình $AB: 2x+3y-4=0$. AC đi qua C và vuông góc AB có phương trình $AC: 3x-2y+10=0$. $A = AB \cap AC \Rightarrow A\left(\frac{-22}{13};\frac{32}{13}\right)$.

Vậy tọa độ các điểm cần tìm là $A\left(\frac{-22}{13};\frac{32}{13}\right); B(2;0); C(-2;2)$.

Ví dụ 26. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình vuông ABCD có A(4;6). Gọi M và N là các điểm thuộc cạnh BC và CD sao cho $MAN = 45^\circ$, điểm M(-4;0) và đường thẳng MN có phương trình $MN: 11x+2y+44=0$. Tìm tọa độ các đỉnh B,C,D.

Giải



Gọi $F = AM \cap BD; E = AN \cap BD, I = NF \cap ME$.

Ta có $FAN = FDN = 45^\circ \Rightarrow$ FADN nội tiếp. Mà $ADN = 90^\circ \Rightarrow NFA = 90^\circ \Rightarrow NF \perp AM$. Tương tự $MAE = EBM = 45^\circ \Rightarrow$ ABME nội tiếp. Mà $ABM = 90^\circ \Rightarrow ME \perp AN$. Do đó I là trực tâm của ΔAMN . Gọi H là giao điểm của AI và MN, khi đó AH vuông gc MN. Từ đó ta có $AH: 2x - 11y + 58 = 0$. Điểm $H = AH \cap MN \Rightarrow H\left(\frac{-24}{5}; \frac{22}{5}\right)$.

Tứ giác ABME nội tiếp $\Rightarrow BEM = BAM\,(1)$. Tứ giác AEIF nội tiếp $\Rightarrow IEF = IAF\,(2)$. Từ (1) và (2) ta có $IAF = BAM$ hay $HAM = BAM$. Do đó $\Delta MAH = \Delta MAB$ (cạnh huyền-góc nhọn) suy ra $MB = MH, AB = AH$. Vậy AM là đương trung trực của BH. AM có phương trình $3x - 4y + 12 = 0$. B và H đối xúng nhau qua AM nên ta tìm được B(0;-2).

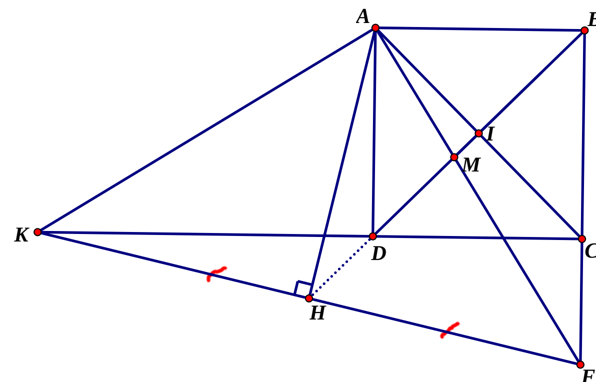
$\overrightarrow{AB} = (4;8) \Rightarrow AB = BC = 4\sqrt{5}; \overrightarrow{BM} = (-4;2) \Rightarrow BM = 2\sqrt{5}$. Ta có

$\frac{BC}{BM} = \frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 2 \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM} \Rightarrow C(-8;2)$. Mặt khác $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow D(-4;10)$.

Vậy tọa độ các điểm cần tìm là $B(0;2); C(-8;2), D(-4;10)$.

Ví dụ 27. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình vuông ABCD có tâm I và đỉnh A(3;1). Điểm $M\left(3;\frac{8}{3}\right)$ thuộc đoạn ID. F là giao điểm giữa AM và BC. Lấy điểm K thuộc tia CD sao cho $KFA = 45^\circ$. Tìm tọa độ các đỉnh B,C,D biết $KF: x + y - 9 = 0$.

Giải



Ta có $KFA = KCA = 45^\circ \Rightarrow$ tứ giác KFCA nội tiếp. Mà $KCF = 90^\circ \Rightarrow KAF = 90^\circ \Rightarrow \Delta AKF$ vuông cân tại A. Đường thẳng AM có phương trình $x - 3 = 0$. Điểm $F = AM \cap KF \Rightarrow F(3;6)$. Gọi H là trung điểm của KF, ta có AH vuông góc KF. AH có phương trình $x - y - 2 = 0$. Điểm $H = AH \cap KF \Rightarrow H\left(\frac{11}{2}; \frac{7}{2}\right) \Rightarrow K(8;1)$. Tứ giác AHCB nội tiếp $ABH = ACH = 45^\circ$. Mà $ABD = 45^\circ$, do đó B,D,H thẳng hàng. Đường thẳng BD đi qua H và M có phương trình $BD: x - 3y + 5 = 0$. $B \in BD \Rightarrow B(3t-5;t), \overrightarrow{AB} = (3t-8;t-1), \overrightarrow{FB} = (3t-8;t-6)$.

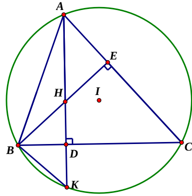
Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{FB}=0 \Leftrightarrow 10t^2-55t+70=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{7}{2}\Rightarrow B\left(\frac{11}{2};\frac{7}{2}\right) \\ t=2\Rightarrow B(1;2)\end{array}\right.$. Điểm $B\left(\frac{11}{2};\frac{7}{2}\right)$ loại vì trùng H nên B(1;2).

BC đi qua B và vuông góc AB có phương trình $BC:-2x+y=0$. Đường thẳng DC đi qua K và vuông góc BC nên có phương trình $DC:x+2y-10=0$. $C=DC\cap BC\Rightarrow C(2;4)$. Ta có $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Rightarrow D(4;3)$.

Vậy tọa độ các điểm cần tìm là $B(1;2);C(2;4),D(4;3)$.

Ví dụ 28. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có trực tâm H(3;2) và K(1;4) là giao điểm giữa AH và đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Viết phương trình cạnh BC.

Giải



Gọi D và E lần lượt là chân đường cao kẻ từ A và B. Ta có tứ giác ADBE nội tiếp $\Rightarrow EBC=EAD$ (cùng chắn DE), mà $EAD=DBC$ (cùng chắn CK). Do đó $EBC=KBC$.

Vậy $EBC=KBC$ và BC vuông góc HK nên BC là đường trung trực của HK và D là trung điểm của HK nên D(2;3).

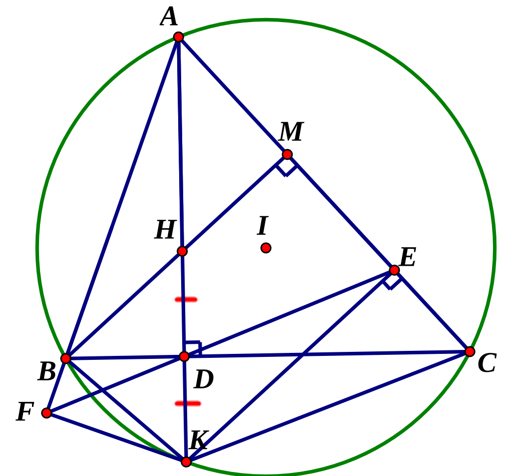
Đường thẳng BC đi qua D và có vtpt là $\overrightarrow{HK}=(-2;2)$ có phương trình $BC:x-y+1=0$.

Ví dụ 29. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có trực tâm H và K(1;0) điểm đối xứng của H qua BC và D là chân đường cao kẻ từ A. E(2;1) là hình chiếu của K trên AC.F(0;2) là giao điểm giữa ED và AB. Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC.

Giải

Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Gọi M là giao điểm giữa BH và AC.

Ta có tứ giác AMDB $\Rightarrow DBM=DAM$.



Mặt khác, $DBM=DBK$ (do H và K đối xứng qua BC).

Do đó $\Rightarrow KBC=KAC\Rightarrow K$ thuộc đường tròn (C).

Do ABKC nội tiếp nên $KBF=KCA\,(1)$. Tứ giác KDEC nội tiếp ($KEC=KDC=90^\circ$) $\Rightarrow KDF=KCE\,(2)$. Từ (1) và (2) ta có

$KBF=KDF\Rightarrow$ tứ giác KDBF nội tiếp. Mà $KDB=90^\circ$ nên $KBF=90^\circ$ hay KF vuông góc AB. AB đi qua F và vuông góc KF nên có phương trình $AB:-x+2y-4=0$. Đường thẳng AC đi qua E và vuông góc KE nên có phương trình $AC:x+y-3=0$.

$A = AB \cap AC \Rightarrow A\left(\frac{2}{3};\frac{7}{3}\right)$. AK có phương trình $AK: 7x + y - 7 = 0$. EF có phương trình $EF: x + 2y - 4 = 0$.

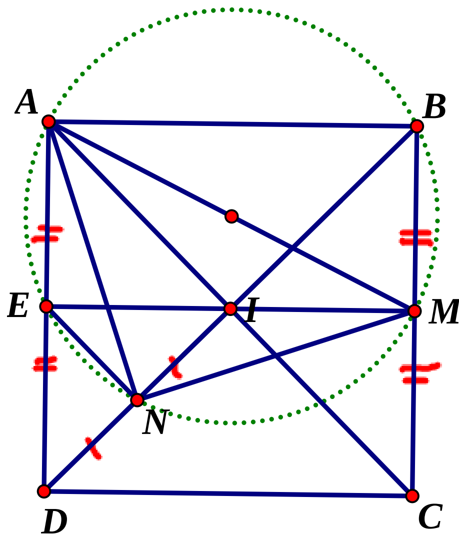
$D = EF \cap AK \Rightarrow D\left(\frac{10}{13};\frac{21}{13}\right)$. BC đi qua D và vuông góc AK có phương $BC: x - 7y + \frac{137}{13} = 0$.

$B = BC \cap AB \Rightarrow B\left(-\frac{18}{13};\frac{17}{13}\right)$ và $C = BC \cap AC \Rightarrow C\left(\frac{17}{13};\frac{22}{13}\right)$.

Vậy tọa độ các điểm cần tìm là $A\left(\frac{2}{3};\frac{7}{3}\right), B\left(-\frac{18}{13};\frac{17}{13}\right), C\left(\frac{17}{13};\frac{22}{13}\right)$.

Ví dụ 30. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình vuông ABCD tâm I. Điểm M(1;2) và N(0;1) lần lượt là trung điểm của BC và ID. Tìm tọa độ các đỉnh A, biết rằng A có hoành độ dương.

Giải



Kẻ ME vuông góc AD, khi đó ABME là hình chữ nhật nên nội tiếp đường tròn (C) đường kính MA hay BE.

EN là đương trung bình của tam giác AID

$\Rightarrow EN \parallel AI \Rightarrow EN \perp BD\left(AI \perp BD\right) \Rightarrow ENB = 90^\circ \Rightarrow$ N thuộc (C) dẫn đến

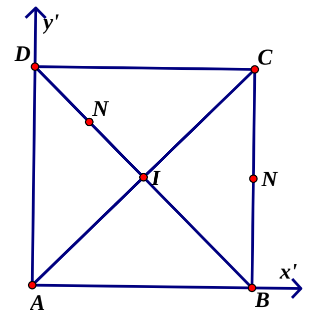
$ANM = 90^\circ$ hay AN vuông góc MN. Hơn nửa, $ANM = ABN = 45^\circ$. Do đó tam giác AMN vuông cân tại N. Đường thẳng AN đi qua N và vuông góc MN có phương trình $AN: x + y - 1 = 0$.

$A \in AN \Rightarrow A(t;1-t), \overrightarrow{AN} = (t;-t), \overrightarrow{MN} = (1;1)$. Từ

$AN = MN \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(1;0)(n) \\ A(-1;2)(l) \end{array}\right.$. Vậy $A(-1;2)$.

Bình luận:Đối với các bài toán hình vuông hay các bài toán có góc vuông và tỉ lệ các cạnh nói chung. Ta có thể sử dung phương pháp tọa độ hóa để chứng minh các tính chất hình như sau:

Chọn hệ trục tọa độ $Ox'y'$ như hình vẽ. Ta có



$A(0;0), B(a;0), C(a;a), D(0;a), M\left(a\frac{a}{2}\right), N\left(\frac{a}{4};\frac{3a}{4}\right)$.

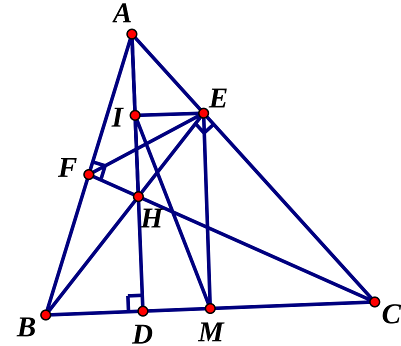
$\overrightarrow{AN}\left(\frac{a}{4};\frac{3a}{4}\right) \Rightarrow AN = \frac{a\sqrt{10}}{2}; \overrightarrow{AM}\left(\frac{-3a}{4};\frac{a}{4}\right) \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Ta tính được : $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AM} = 0$ và $AM = AN$ suy ra tam giác AMN vuông cân tại N. Sau đó giải tiếp như trên.

Ví dụ 31. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm H, phương trình đường thẳng AH là $3x - y + 3 = 0$, trung điểm của cạnh BC là M(3;0). Gọi E và F là chân đường

coa hạ từ B và C của tam giác ABC. Phương trình EF là $x-y+7=0$. Tìm tọa độ điểm A,biết A có hoành độ dương.

Giải



Gọi I là trung điểm của AH và D là chân đường cao kẻ từ A. Tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn tâm I và bốn điểm BFEC cùng thuộc đường tròn tâm M. Do E,F là giao tuyến của hai đường tròn nên EF vuông góc IM.

Ta có: $IE = IH \Rightarrow IEH = IHE = BHD$ và

$MEB = MBE \Rightarrow MEB + IEH = MBE + BHD = 90^\circ$. Tức là ta có $ME \perp IE$. I là giao điểm giữa IM và EF suy ra I(1;6). Điểm E thuộc vào đường thẳng EF suy ra $E(3t-7;t)$. Ta có: $\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{ME} \Rightarrow E(5;4) \vee E(-1;2)$. Với $E(2;3) \Rightarrow IE = 4\sqrt{5}; E(-1;2) \Rightarrow IE = 4\sqrt{5}$. Vì điểm A thuộc AH nên A(a;3a+3). Ta có: $IA = IE \Leftrightarrow IA^2 = IE^2 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (3a-3)^2 = 20 \Leftrightarrow a = 1 \pm \sqrt{2}$.

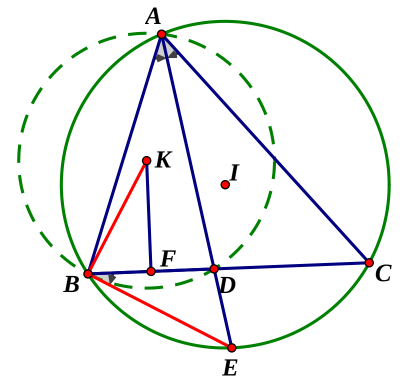
Vì A có hoành độ dương $A\left(1+\sqrt{2};6+3\sqrt{2}\right)$.

Ví dụ 32. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) tâm I. Phân giác trong góc A của tam giác ABC cắt BC tại D và cắt đường tròn (C) tại E. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD. Biết K(1;1),E(0;4) và AB có phương trình $x-y+3=0$ và điểm B có hoành độ dương.Tìm tọa độ đỉnh A.

Giải

Gọi F là trung điểm của BD. K là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABD nên ta có $KF \perp BD$ và $BKD = 2BAD$ (góc nội tiếp có số đo bằng một nửa góc ở tâm cùng chắn một cung)

$\Rightarrow BAD = BKF$. Mặt khác, $EBC = EAC = BAD$.



Từ các điều trước đó ta suy ra

$EBC = BKF \Rightarrow EBC + FBK = BKF + FBK = 90^\circ \Rightarrow KB \perp EB$.

Ta có: $B \in AB \Rightarrow B(b;b+3)$.

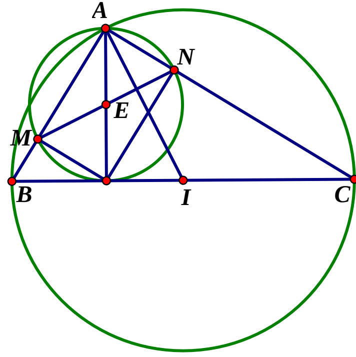
$KB \perp EB \Leftrightarrow \overrightarrow{KB}.\overrightarrow{EB} = 0 \Leftrightarrow b = 1 \vee b = -1$. Do B có hoành độ dương nên ta chọn B(1;4). $A \in AB \Rightarrow A(a;a+3), a \neq 1$.

Từ $KA = KB \Leftrightarrow a = 1 \vee a = -2$. Do điểm A khác B nên ta chọn A(-2;1).

Vậy tọa độ điểm cần tìm là A(-2;1).

Ví dụ 33. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC vuông tai A nội tiếp đường tròn $(T): x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của ΔABC. Đường tròn đường kính AH cắt AB,AC lần lượt tại M và N. Tìm tọa độ đỉnh A và viết phương trình cạnh BC, biết MN có phương trình $20x - 10y - 9 = 0$ và H có hoành độ nhỏ hơn tung độ.

Giải



Đường tròn (T) có tâm I(3;1) là trung điểm của BC và bán kính $R = \sqrt{5}$. Do $IA = IC \Rightarrow IAC = ICA\,(1)$. Đường đường kính AH cắt AB tại M nên $MH \perp AB \Rightarrow MH \parallel AC$ (cùng vuông góc AB) suy ra $MHB = ACH\,(2)$. Mặt khác $ANM = AHM\,(3)$ (cùng chắn AM). Từ (1),(2),(3) ta cóÌ

$IAC + ANM = ICA + AHM = MHB + AHM = 90^\circ$ .Suy ra: AI vuông góc MN.

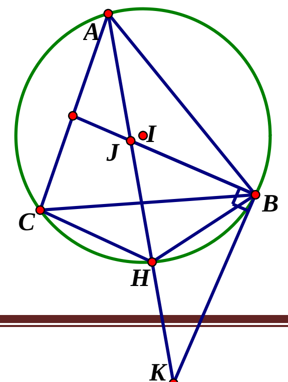
Từ đây ta viết được phương trình $AI: x + 2y - 5 = 0$. Điểm $A = IA \cap (T)$ nên tọa độ của A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = 2 \\ x = 5, y = 0 \end{array}\right.$. Điểm A(1;2) nhận vì thỏa A và I nằm về hai phía của MN.

Điểm A(5;0) loại vì A và I nằm về một phía của MN. Gọi E là tâm của đương tròn đường kính AH thì E là trung điểm của AH. Do AMHN là hình chữ nhật (tứ giác có 3 góc vuông) nên E cũng là trung điểm của MN. $E \in MN \Rightarrow E\left(t; 2t - \frac{9}{10}\right)$. Do E trung điểm của AH nên $H\left(2t - 1; 4t - \frac{38}{10}\right)$.

Vì $AH \perp HI \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{IH} = 0 \Leftrightarrow 20t^2 - \frac{272}{5}t + \frac{896}{25} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{8}{5} \Rightarrow H\left(\frac{11}{5}; \frac{13}{5}\right) \\ t = \frac{28}{25} \Rightarrow H\left(\frac{31}{25}; \frac{17}{25}\right) \end{array}\right.$. Do H có hoành độ nhỏ hơn tung độ nên ta nhận $H\left(\frac{11}{5}; \frac{13}{5}\right)$. Đường thẳng BC đi qua H và vuông góc AH nên có phương trình $BC: 2x + y - 7 = 0$. Vậy $A(1;2)$ và $BC: 2x + y - 7 = 0$.

Ví dụ 34. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có tâm đường tròn ngoại tiếp là $I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{16}\right)$,tâm đường tròn nội tiếp ΔABC là $J(1;0)$. Đường phân giác trong góc BAC và đương phân giác ngoài góc ABC cắt nhau tại K(2;-8). Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC,biết đỉnh B có hoành độ dương.

Giải



Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp ΔABC và H là giao điểm giữa AK và đường tròn tâm (C). Xét tam giác BHJ có $HJB = JAB + JBA$ (góc ngoài của tam giác) và $HBJ = JBC + HBC$. Mà $JBH = JBA;; HBC = HAC = HAB$ (do AJ và BJ là các đường phân giác).

Từ các điều trên ta có $HBJ = HJB(1) \Rightarrow \Delta HBJ$ cân tại H $\Rightarrow HB = HJ$. Mà $HAC = HAC \Rightarrow HC = HB$ (tính chất góc nội tiếp). Do đó $HJ = HB = HC$. Mặt khác, BJ và BK lần lượt là đường phân giác trong và phân giác ngoài góc ABC nên KB vuông góc JB. Suy ra: $HJB + HKB = 90^\circ = HBK + HBJ(2)$. Từ (1) và (2) suy ra $HBK = HKB \Rightarrow \Delta HBK$ cân tại H $\Rightarrow HB = HK$. Vậy là $HB = HC = HK = HJ$. H là trung điểm của KJ nên $H\left(\frac{3}{2};-4\right)$. Đường tròn(C) có bán kính IH có phương trình $(C): \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{16}\right)^2 = \left(\frac{65}{16}\right)^2$. Từ $HB = HC = HK = HJ \Rightarrow$ các điểm B,C,K,J thuộc đường tròn (T) có tâm H và bán kính HJ. Ta viết được $(T): \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + (y+4)^2 = \frac{65}{4}$. Các điểm B,C thuộc đường tròn (C) và (T) nên tọa độ của B và C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + (y+4)^2 = \frac{65}{4} \\ \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{16}\right)^2 = \left(\frac{65}{16}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5, y=-2 \\ x=-2, y=-2 \end{array}\right.$$

. Do B có hoành độ dương nên B(5;-2) và C(-2;-2).

Đường thẳng AH đi qua H và J có phương trình $AH: 8x + y - 8 = 0$. Điểm A là giao điểm giữa AH và (C) nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{16}\right)^2 = \left(\frac{65}{16}\right)^2 \\ 8x+y-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}, y=4 \\ x=\frac{3}{2}, y=-4 \end{array}\right.$. Vì điểm A phải khác H nên $A\left(\frac{1}{2};4\right)$. Vậy tọa độ các điểm cần tìm là $A\left(\frac{1}{2};4\right)$, B(5;-2) , C(-2;-2) .

<u>Bài tập tự rèn luyện</u>:

Bài 11. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn kẻ tiếp tuyến AB đến đường tròn(C) (B là tiếp điểm). Điểm D(0;-1) thuộc đường thẳng qua B và song song AI. Tìm tọa độ điểm A, biết A thuộc đường thẳng $d: x - y + 1 = 0$.

Bài 12. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + (y-2)^2 = 10$. Từ điểm A thuộc đường thẳng $d: x - y + 2 = 0$ kẻ các tiếp tuyến AB,AC (B,C là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm A, biết D(4;0) thuộc đường thẳng BC.

Bài 13. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có đỉnh A(-2;-1),trực tâm H(2;1) và độ dài cạnh $BC = 2\sqrt{5}$. Gọi D, E lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C. Biết trung điểm M của BC thuộc đường thẳng $d: x - 2y - 1 = 0$ và M(3;-4) thuộc DE. Viết phương trình cạnh BC.

Bài 14. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có trực tâm H(2;2) và độ dài cạnh $BC = \sqrt{5}$ và nội tiếp đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 3x - 5y + 6 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC, biết A có hoành độ dương.

Bài 15. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC nội tiếp đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 20$.

Chân đường cao hạ từ B và C lần lượt là M(-1;3) và N(2;-3). Tìm tọa độ các đỉnh ΔABC, biết A có tung độ âm.

Bài 16. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm I(1;2). Gọi E và F lần lượt là chân đường cao hạ từ B và C,phương trình $EF: 3x - y - 7 = 0$.

Biết tiếp tuyến tại A của đường tròn (C) đi qua điểm M(3;-2) và điểm B thuộc tia Oy. Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC.

Bài 17. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC. Gọi H, K lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh B và C. Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC, biết H(5;-1), $K\left(\frac{1}{5};\frac{3}{5}\right)$, phương trình cạnh $BC: x + 3y + 4 = 0$ và B có hoành độ âm.

Bài 18. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình thang vuông ABCD vuông tại A và D có $CD = 2AB$, đỉnh B(1;2). Hình chiếu của D trên AC là H(-1;0). Gọi N là trung điểm của HC. Tìm các đỉnh còn lại của hình thang, biết $\text{DN}: x - 2y - 2 = 0$.

Bài 19. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC vuông tại A(-2;0). Gọi E là chân đường cao kẻ từ A và F là điểm đối xứng của E qua A. Trực tâm của ΔBCF là H(-2;3). Tìm tọa độ đỉnh B và C của ΔABC, biết trung điểm của BC thuộc đường thẳng $d: x - y + 4 = 0$.

Bài 20. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có H(1;2) là hình chiếu của A trên BD. M(5;1) là trung điểm của BC và đường thẳng chứa đường trung tuyến kẻ từ A của ΔAHD có phương trình $d: 4x + y - 4 = 0$. Viết phương trình cạnh BC.

Bài 21. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC cân tại A(-1;3). D là điểm thuộc đoạn AB sao cho $BD = 2AD$ và H là hình chiếu của B trên CD. Điểm B thuộc đường thẳng $d: x + y + 7 = 0$ và $M\left(\frac{1}{2};\frac{-3}{2}\right)$ là trung điểm của CH. Tìm tọa độ đỉnh B và C của ΔABC.

Bài 22. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm A(5;8) và đường thẳng $d: x-y-1=0$. Tìm điểm B thuộc đường thẳng d sao cho khoảng có đúng ba đường thẳng d_1,d_2,d_3 thỏa mản khoảng cách từ A đến d_1,d_2,d_3 đều bằng 4 và khoảng cách từ B đến đều bằng 6.

Bài 23. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC nội tiếp đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-3)^2=26$ và $G\left(1;\frac{8}{3}\right)$là trọng tâm của ΔABC. Điểm M(7;2) thuộc đường thẳng qua A và vuông góc BC $(M \neq A)$. Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC biết tung độ đỉnh B lớn hơn tung độ đỉnh C.

Bài 24. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC nội tiếp đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=25$. Các điểm K(-1;1),H(2;5) lần lượt là chân đường cao kẻ từ A và B. Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC, biết đỉnh C có hoành độ dương.

Bài 25. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có trực tâm H(3;0) và trung điểm của cạnh BC là M(6;1). Đường thẳng AH có phương trình $x+2y-3=0$. Gọi D và E lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C của ΔABC. Xác định tọa độ các đỉnh của ΔABC, biết điểm D có tung độ dương.

Bài 26. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x+2)^2+(y-3)^2=4$ và điểm M(1;-8). Viết phương trình đường thẳng d đi qua M sao cho d cắt (C) tại hai điểm A và B thỏa mản diện tích ΔABI lớn nhất (I là tâm của đường tròn (C)).

Bài 27. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=9$ và đường thẳng $d: 3x-4y+m=0$. Tìm m để trên d có duy nhất một điểm P mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến PA,PC tới (C)(A,C là các tiếp điểm) sao cho ΔPAC đều.

Bài 28. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có đỉnh A(2;6),chân đường phân giác trong góc A là $D\left(2;\frac{-3}{2}\right)$. Tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là $I\left(\frac{-1}{2};1\right)$. Tìm tọa độ đỉnh B và C của ΔABC.

Bài 29. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có trọng tâm $G\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$; tâm đường tròn ngoại tiếp là I(1;-2); điểm E(10;6) thuộc đường trung tuyến kẻ từ A và F(9;-1) thuộc đường thẳng BC. Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC, biết đỉnh B có tung độ lớn hơn 2.

Bài 30. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC cân tại A và nội tiếp đường tròn $(C): x^2+y^2-10y-25=0$. Đường kính qua B cắt (C) tại M(5;0). Đường cao kẻ từ C cắt (C) tại $N\left(\frac{-17}{5};\frac{-6}{5}\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh của ΔABC, biết đỉnh A có hoành độ dương.

Bài 31. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC nội tiếp đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+2y-20=0$.Đường phân giác trong góc A nằm trên đường thẳng $d: x+y=0$. Biết rằng M(3;-4) thuộc đường thẳng BC và điểm A có hoành độ dương.

Bài 32. Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=25$ và M(9;-4). Tìm điểm N thuộc (C) sao cho MN là ngắn nhất.

Bài 33. Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn $(C):(x+2)^2+(y-1)^2=4$. Gọi điểm M sao cho tiếp tuyến qua M tiếp xúc (C) tại E; cát tuyến qua M cắt (C) tại A và B sao cho ΔABE vuông cân tại E. Tìm tọa độ điểm M sao cho MO là ngắn nhất (O là gốc tọa độ).

Bài 34. Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn $(C): x^2+(y-1)^2=4$ và đường thẳng $d: x-2y+1=0$. Gọi (C’) là đường tròn có tâm I ; (C’) tiếp xúc ngoài với (C) và có bán kính bằng 4. Viết phương trình đường tròn (C’) sao cho khoảng cách từ I đến d là lớn nhất.

Bài 35. Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm I(3;0), trực tâm H(2;0) và BC có phương trình $x-y-4=0$. Lập phương trình cạnh AB, biết đỉnh B có hoành độ nhỏ hơn 3.

<u>Đề thi đại học qua các năm</u>

Bài 36.(THPT Quốc Gia -2016) Trong mặt phẳng Oxy, cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính BD. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng BC, BD và P là giao điểm của hai đường thẳng MN, AC. Biết đường thẳng AC có phương trình $x-y-1=0$, M(0;4), N(2;2) và A có hoành độ nhỏ hơn 2. Tìm tọa độ các điểm P, A và B.

Bài 37.(THPT Quốc Gia -2015) Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC; D là điểm đối xứng của B qua H;K là hình chiếu vuông góc của C trên AD. Giả sử H(-5;-5), K(9;-3) và trung điểm AC thuộc đường thẳng $x-y+10=0$. Tìm tọa độ điểm A.

Bài 38.(Đề minh họa THPT Quốc Gia -2015) Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔOAB có A và B thuộc đường thẳng $\Delta: 4x+3y-12=0$ và K(6;6) là tâm đường tròn bàng tiếp góc O. Gọi C là điểm nằm trên Δ sao cho $AC=AO$ và các điểm B, C khác phía so với A. Biết điểm C có hoành độ bằng $\frac{24}{5}$, tìm tọa độ các đỉnh A và B.

Bài 39.(D -2014) Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có chân đường phân giác trong của góc A là điểm D(1;-1). Đường thẳng AB có phương trình $3x+2y-9=0$ và tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp ΔABC có phương trình $x+2y-7=0$. Viết phương trình cạnh BC.

Bài 40.(A -2013 cb) Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có điểm C thuộc đường thẳng $d: 2x+y+5=0$ và A(-4;8). Gọi M đối xứng với B qua C; N là hình chiếu vuông góc của B trên MD. Tìm tọa độ điểm B và C, biết rằng N(5;-4).

Bài 41.(A -2013 nc) Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x-y=0$. Đường tròn (C) có bán kính $R=\sqrt{10}$ và cắt Δ tại A và B sao cho $AB=4\sqrt{2}$. Tiếp tuyến của (C) tại A và B cắt nhau tại một điểm thuộc tia Oy. Viết phương trình đường tròn (C).

Bài 42.(D -2013 cb) Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có trung điểm cạnh AB là $M\left(\frac{-9}{2};\frac{3}{2}\right)$, chân đường cao kẻ từ đỉnh B là H(-2;4) và tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là I(-1;1). Tìm tọa độ đỉnh C.

Bài 43.(D -2013 nc) Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=4$ và đường thẳng $d: y-3=0$. Tam giác MNP có trực tâm trùng với tam của đường tròn (C); các đỉnh N và P thuộc d; đỉnh M và trung điểm của MN thuộc (C). Tìm tọa độ điểm P.

Bài 44.(B -2012 cb) Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường tròn $(C_1): x^2+y^2=4; (C_2): x^2+y^2-12x+18=0$ và đường thẳng $d: x-y-4=0$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc (C_2), tiếp xúc với d và cắt (C_1) tại A và B sao cho AB vuông góc d.

Bài 45.(D -2012 nc) Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $d: 2x-y+3=0$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc d và cắt trục Ox tại A và B, cắt trục Oy tại C và D sao cho $AB=CD=2$.

Bài 46.(A -2011 cb) Trong mặt phẳng Oxy, cho đường đường tròn$(C): x^2+y^2-4x-2y=0$ và đường thẳng $d: x+y+2=0$. Gọi I là tâm của đường tròn (C); M là điểm thuộc d . Qua M kẻ tiếp tuyến MA, MB đến (C)(A,B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M biết tứ giác MAIB có diện tích bằng 10.

Bài 47.(B -2011 nc) Trong mặt phẳng Oxy, cho ΔABC có đỉnh $B\left(\frac{1}{2};1\right)$, đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc với các cạnh AB, AC, AB tương ứng tại D, E, F. Cho D(3;1) và $EF: y-3=0$. Tìm tọa độ đỉnh A, biết A có tung độ dương.

Bài 48.(D -2011 nc) Cho điểm A(1;0) và đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm M, N sao cho tâm giác MAN vuông cân tại A.

Bài 49.(D -2010 cb) Cho ΔABC có đỉnh A(3;-7), trực tâm H(3;-1) và tâm đường tròn ngoại tiếp là I(-2;0). Tìm tọa độ đỉnh C, biết C có tung độ dương.

....